

ÉLÉMENTS RÉGULIERS ET REPRÉSENTATIONS DE GELFAND-GRAEV DES GROUPES RÉDUCTIFS NON CONNEXES

PAR KARINE SORLIN

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$ et F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. Soit σ un automorphisme rationnel quasi-central de G . Nous construisons ci-dessous l'équivalent des représentations de Gelfand-Graev du groupe $\tilde{G}^F = G^F \cdot \langle \sigma \rangle$, lorsque σ est unipotent et lorsqu'il est semi-simple. Nous montrons de plus que ces représentations vérifient des propriétés semblables à celles vérifiées par les représentations de Gelfand-Graev dans le cas connexe en particulier par rapport aux éléments réguliers.

Texte reçu le 17 décembre 2002, accepté le 7 mars 2003

KARINE SORLIN, LAMFA, Université de Picardie Jules Verne, 33 rue Saint-Leu, 80000 Amiens (France) • *E-mail* : karine_sorlin@yahoo.fr • *Url* : <http://www.mathinfo.u-picardie.fr/sorlin/>

Classification mathématique par sujets (2000). — 20C33, 20G05.

Mots clefs. — Groupes réductifs finis, groupes algébriques non connexes.

ABSTRACT (*Regular Elements and Gelfand-Graev Representations for Disconnected Reductive Groups*)

Let G be a connected reductive group defined over $\mathbb{F}_q$ and let F be the corresponding Frobenius endomorphism. Let σ be a quasi-central automorphism of G , which means that σ is quasi-semi-simple (*i.e.* σ stabilises $(T \subset B)$ where T is a maximal torus included in a Borel subgroup B of G) and $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ for any quasi-semi-simple automorphism $\sigma' = \sigma \circ \text{ad}(g)$, where $\text{ad}(g)$ is the conjugation by g for all $g \in G$. We suppose also that σ is rational.

We define in this article Gelfand-Graev representations for the group $\tilde{G}^F = G^F \cdot \langle \sigma \rangle$ when σ is unipotent and when it is semi-simple, which extend the σ -stable Gelfand-Graev representations for connected reductive groups.

Let T be a σ -stable rational maximal torus of G included in a σ -stable rational Borel subgroup of G . Let U be the unipotent radical of B .

In the connected reductive case, Gelfand-Graev representations of G^F are obtained by inducing an irreducible linear character of U^F which is called a regular character. We define a regular character of $U^F \cdot \langle \sigma \rangle$ as the extension of a σ -stable regular character of U^F . When σ is unipotent, σ -stable Gelfand-Graev representations of G^F are obtained by inducing σ -stable regular characters of U^F . In this case, we define Gelfand-Graev representations of $G^F \cdot \langle \sigma \rangle$ as the representations obtained by inducing regular characters of $U^F \cdot \langle \sigma \rangle$. When σ is semi-simple, the definition of Gelfand-Graev representations is more complicated.

Gelfand-Graev representations of $G^F \cdot \langle \sigma \rangle$ have similar properties to Gelfand-Graev representations of G^F . They are multiplicity free and their Harish-Chandra restrictions to a rational σ -stable Levi subgroup included in a rational σ -stable parabolic subgroup still are Gelfand-Graev representations. We say that an element of $G \cdot \sigma$ is regular if the dimension of its centralizer in G is minimal among all elements of $G \cdot \sigma$. The dual of any Gelfand-Graev representation of $G^F \cdot \sigma$ is zero outside regular unipotent elements of $G^F \cdot \sigma$ when σ is unipotent (*resp.* outside regular pseudo-unipotent elements of $G^F \cdot \sigma$, *i.e.* conjugates under G of regular elements of $U \cdot \sigma$, when σ is semi-simple). Moreover, Gelfand-Graev representations can be used to calculate the average value of irreducible characters of $G^F \cdot \langle \sigma \rangle$ on the set of G^F -classes of regular unipotent (*resp.* pseudo-unipotent) elements of $G^F \cdot \sigma$ if σ is unipotent (*resp.* semi-simple). When σ is semi-simple, the characteristic can be chosen good for $(G^\sigma)^0$ and we can get the exact values of irreducible characters of $G^F \cdot \langle \sigma \rangle$ on G^F -classes of regular pseudo-unipotent elements of $G^F \cdot \sigma$.

1. Introduction

Les groupes réductifs non connexes de la forme $G \cdot \langle \sigma \rangle$, où G est un groupe réductif connexe et σ un automorphisme de G , ont été étudiés par R. Steinberg [8], F. Digne & J. Michel [4] et G. Malle [6].

On suppose que G est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, que F est l'endomorphisme de Frobenius correspondant et que σ est un automorphisme quasi-central de G , ce qui signifie que σ est quasi-semi-simple (*i.e.* σ stabilise un couple $(T \subset B)$ où T est un tore maximal inclus dans un sous-groupe de

Borel B de G et $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ pour tout automorphisme quasi-semi-simple $\sigma' = \sigma \circ \text{ad}(g)$, où $\text{ad}(g)$ est la conjugaison par g pour tout $g \in G$. On suppose de plus σ rationnel.

La notion d'élément quasi-central a été introduite par F. Digne & J. Michel dans [4]. Ils ont montré [4, prop. 1.34] que pour tout automorphisme rationnel σ' de G , il existe g dans G tel que $\sigma' \circ \text{ad}(g)$ soit rationnel quasi-central. Quand σ' est un automorphisme quasi-semi-simple de G , alors $G^{\sigma'}$ est un groupe réductif [4, th. 1.8] et quand σ' est quasi-central, il y a de nombreuses similarités entre $G \cdot \sigma'$ et $(G^{\sigma'})^0$, en particulier pour les systèmes de racines et les groupes de Weyl [4, th. 1.15], les caractères de Deligne-Lusztig [4, section 4] et les représentations de Gelfand-Graev (section 5).

Le but de cet article est de définir des représentations de Gelfand-Graev pour $\tilde{G}^F = G^F \cdot \langle \sigma \rangle$ qui étendent les représentations de Gelfand-Graev σ -stables pour les groupes réductifs connexes.

Soit T un tore maximal rationnel σ -stable de G inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ -stable de G . Soit U le radical unipotent de B . Dans le cas connexe, les représentations de Gelfand-Graev de G^F sont obtenues en induisant certains caractères irréductibles de U^F qu'on appelle caractères réguliers. Dans le cas non connexe, on définit un caractère régulier de $U^F \cdot \langle \sigma \rangle$ comme l'extension d'un caractère régulier σ -stable de U^F . Nous nous placerons dans un des deux cas extrêmes σ unipotent ou σ quasi-semi-simple. Le cas général peut s'y ramener en utilisant la décomposition de Jordan de σ .

Lorsque σ est unipotent, les représentations de Gelfand-Graev σ -stables de G^F sont obtenues en induisant un caractère régulier σ -stable de U^F (proposition 5.1). Dans ce cas, on définit les représentations de Gelfand-Graev de $G^F \cdot \langle \sigma \rangle$ comme les représentations obtenues en induisant les caractères réguliers de $U^F \cdot \langle \sigma \rangle$ (définition 5.2). Quand σ est semi-simple, la proposition 5.1 n'est plus vraie. La définition des représentations de Gelfand-Graev est alors plus compliquée (définition 5.3).

Les représentations de Gelfand-Graev de $G^F \cdot \langle \sigma \rangle$ ont les mêmes propriétés que les représentations de Gelfand-Graev de G^F . Leurs composantes irréductibles sont de multiplicité 1 (proposition 6.1). Leur restriction de Harish-Chandra à un sous-groupe de Levi σ -stable rationnel inclus dans un sous-groupe parabolique σ -stable rationnel est encore une représentation de Gelfand-Graev (proposition 6.4). On dit qu'un élément de $G \cdot \sigma$ est régulier si la dimension de son centralisateur dans G est minimale parmi les éléments de $G \cdot \sigma$. Le dual de toute représentation de Gelfand-Graev de $G^F \cdot \sigma$ est nul en dehors des éléments unipotents réguliers de $G^F \cdot \sigma$ quand σ est unipotent (resp. en dehors des éléments pseudo-unipotents réguliers de $G^F \cdot \sigma$, *i.e.* des conjugués sous G d'éléments réguliers de $U \cdot \sigma$, quand σ est semi-simple) (proposition 7.2).

Les représentations de Gelfand-Graev peuvent être utilisées pour calculer la valeur moyenne des caractères irréductibles de $G^F \cdot \langle \sigma \rangle$ sur un ensemble de

classes de G^F -conjugaison d'éléments unipotents (resp. pseudo-unipotents) réguliers de $G^F \cdot \sigma$ si σ est unipotent (resp. semi-simple) (théorème 8.4). Quand σ est semi-simple et quand la caractéristique est bonne pour $(G^\sigma)^0$, on peut alors obtenir les valeurs exactes des caractères irréductibles de $G^F \cdot \langle \sigma \rangle$ sur les classes de G^F -conjugaison d'éléments pseudo-unipotents réguliers de $G^F \cdot \sigma$.

2. Résultats généraux sur les groupes réductifs non connexes

Soit $\tilde{G}$ un groupe réductif non connexe. On note G la composante neutre de $\tilde{G}$. Nous utiliserons les définitions suivantes, introduites dans [4], qui généralisent les notions de tore et de sous-groupe de Borel :

DÉFINITION 2.1. — Un *quasi-borel* de $\tilde{G}$ est le normalisateur dans $\tilde{G}$ d'un sous-groupe de Borel de G . Un *quasi-tore* de $\tilde{G}$ est le normalisateur dans $\tilde{G}$ d'un couple $T \subset B$ formé d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel de G .

On note $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p à q éléments (q étant une puissance de p). Désormais et jusqu'à la fin de l'article, on considère un groupe réductif non connexe $\tilde{G}$ de la forme

$$\tilde{G} = G \cdot \langle \sigma \rangle,$$

où G est un groupe réductif connexe sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_q}$ de $\mathbb{F}_q$ défini sur $\mathbb{F}_q$ (on note F l'endomorphisme de Frobenius correspondant) et σ un automorphisme de G . On dit que σ est quasi-semi-simple s'il fixe un couple (T, B) formé par un tore maximal T de G inclus dans un sous-groupe de Borel B de G .

Le théorème suivant explicite les relations qui existent alors entre G et le groupe G^σ des points de G fixes par σ .

THÉORÈME 2.2 (voir [4], th. 1.8). — (i) G^σ est un groupe réductif.

(ii) Soit T un tore maximal σ -stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ -stable B de G . Soit Φ l'ensemble des racines relativement à (G, T) . Si $\alpha \in \Phi$, si $\lambda \mapsto x_\alpha(\lambda)$ est le sous-groupe à un paramètre correspondant, et si i est l'ordre de la σ -orbite de α , on définit $C_{\sigma, \alpha} \in \overline{\mathbb{F}_q}^\times$ par

$$\sigma^i(x_\alpha(\lambda)) = x_\alpha(C_{\sigma, \alpha} \lambda).$$

Alors, il existe une surjection naturelle de l'ensemble des orbites sous σ vérifiant la condition

$$(*) \quad C_{\sigma, \alpha} = \pm 1,$$

où -1 n'est autorisé que s'il existe deux racines de l'orbite dont la somme est une racine, sur l'ensemble des racines de $(G^\sigma)^0$ relativement à $(T^\sigma)^0$. Cette surjection est bijective et tous les $C_{\sigma, \alpha}$ valent 1, sauf si le diagramme de Dynkin de G possède k composantes de type A_{2n} permutées circulairement par σ ,

où σ^k agit par retournement de chacune de ces composantes. Alors, pour toute racine α telle que $\alpha + \sigma^k(\alpha)$ soit une racine, les orbites de α et de $\alpha + \sigma^k(\alpha)$ ont même image et $C_{\sigma,\alpha} = C_{\sigma,\alpha+\sigma^k(\alpha)}$.

On dit que σ est *quasi-central* s'il est quasi-semi-simple et si l'on a $\dim(G^\sigma) > \dim(G^{\sigma'})$ pour tout automorphisme quasi-semi-simple σ' tel que $\sigma' = \sigma \circ \text{ad}(g)$, où on note $\text{ad}(g)$ la conjugaison par g pour tout $g \in G$.

THÉORÈME 2.3 (voir [4, th. 1.15, 1.29, 1.33 et 1.36] et [5, prop. 2.1])

(i) Si σ est quasi-semi-simple, alors σ est quasi-central si et seulement si, pour tout couple (T, B) où T est un tore maximal σ -stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ -stable B de G , toute racine simple relativement à (T, B) vérifie la condition (*) du théorème 2.2.

(ii) Si σ est quasi-central, alors on a $G^\sigma = (G^\sigma)^0 \cdot Z(G^\sigma)$.

(iii) Si σ est quasi-central unipotent, alors G^σ est connexe et si T est un tore maximal σ -stable inclus dans un sous-groupe de Borel σ -stable, T^σ est connexe et on a $T = T^\sigma \times \mathcal{L}(T)$, où $\mathcal{L} : T \rightarrow T$ est définie par $t \mapsto t^{-1}\sigma(t)$.

(iv) Si σ est quasi-central et rationnel, alors, il existe un couple (T, B) formé par un tore maximal rationnel σ -stable T inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ -stable B de G .

NOTATION 2.4. — Lorsque pour toute racine simple α , on a l'égalité $C_{\sigma,\alpha} = 1$, on dira que σ vérifie la condition (RS).

REMARQUE 2.5. — Lorsque σ est unipotent quasi-central, la condition (RS) est vérifiée.

Démonstration. — Comme σ est quasi-central, on a $C_{\sigma,\alpha} = \pm 1$ pour toutes les racines $\alpha \in \Pi$ et tous les $C_{\sigma,\alpha}$ valent 1, sauf si le diagramme de Dynkin de $\tilde{G}$ possède k composantes de type A_{2n} permutées circulairement par σ où σ^k agit par retournement de chacune de ces composantes. Mais, dans ce cas particulier, le cardinal de l'orbite de α est alors égal à $2k$; or on a supposé σ unipotent, donc l'ordre de σ est une puissance de la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_q$. Mais comme l'ordre de α divise l'ordre de σ , c'est donc que la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_q$ vaut 2. Ainsi, on a encore $C_{\sigma,\alpha} = 1$. $\square$

On supposera par la suite que σ est rationnel, quasi-central, unipotent ou semi-simple. On choisit un couple $T \subset B$ où T est un tore maximal rationnel σ -stable inclus dans un sous-groupe de Borel rationnel σ -stable de G . On note U le radical unipotent de B .

Soit Φ le système de racines de (G, T) . On choisit sur Φ l'ordre tel que

$$U = \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_\alpha$$