

IRRÉDUCTIBILITÉ GÉNÉRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS DE MONODROMIES

PAR IVAN MARIN

RÉSUMÉ. — Nous étudions le problème de l'irréductibilité du produit tensoriel de deux représentations irréductibles d'un groupe fondamental $G = \pi_1(X)$, quand X est le complémentaire d'hypersurfaces dans un espace projectif. Nous mettons en place un formalisme adapté et utilisons une approche par monodromie pour définir une classe de représentations irréductibles de G dont les produits tensoriels restent irréductibles pour des valeurs génériques de paramètres de définition. Ceci est appliqué au groupe de tresses pures et à ses représentations les plus classiques (les algèbres de Hecke de type A , l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami, les actions de Yang-Baxter sur les produits tensoriels de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -modules). Nous l'appliquons également aux algèbres de Hecke d'autres groupes de Coxeter, quotients des groupes de tresses pures généralisés. Enfin, nous définissons et obtenons des résultats sur des « algèbres de Hecke infinitésimales », objets cardinaux pour la décomposition des produits tensoriels de représentations des algèbres de Hecke. En particulier, nous montrons que non seulement les puissances extérieures, mais tout foncteur de Schur appliqué à la représentation de réflexion d'une algèbre de Hecke donne lieu à une représentation irréductible du groupe de tresses pures correspondant.

Texte reçu le 13 février 2003, accepté le 16 juin 2003

IVAN MARIN, 69 rue Sébastien Gryphe, 69007 Lyon (France).

E-mail : marin@maths.univ-evry.fr • *Url* : http://grozny.maths.univ-evry.fr/pages_perso/marin

Classification mathématique par sujets (2000). — 20C99, 20F40, 20F36.

Mots clefs. — Représentations, algèbre d'holonomie, groupes de tresses.

ABSTRACT (*Generic Irreducibility of Monodromy Tensor Products*)

We consider the general problem of establishing irreducibility criteria for the tensor product of two irreducible representations of a fundamental group $G = \pi_1(X)$, in particular when X is the complement of hypersurfaces in a projective space. We set up an ad-hoc formalism and use a monodromy approach to define a class of irreducible representations of G whose tensor products remain irreducible for generic values of defining parameters. This is applied to the pure braid group, and yields the result that the action of the pure braid group is irreducible on the tensor products of a wide class of representations (for generic parameters). The family of representations concerned here includes the representations of the Hecke algebras of type A , of the Birman-Wenzl-Murakami algebra, and the Yang-Baxter actions on the tensor products of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -modules. We then also apply this to the Hecke algebra representations of generalized braid groups. Finally, we define and get results on “infinitesimal Hecke algebras”, which are convenient objects to study tensor products decompositions of Hecke algebra representations. In particular, we show that not only the alternating powers, but every Schur functor applied to the reflection representation of Hecke algebras yield irreducible representations of the corresponding pure braid group.

1. Introduction

1.1. Motivation. — Pour tout groupe G dont on connaît des familles de représentations irréductibles (resp. indécomposables), toujours supposées de dimension finie et, dans cette introduction, sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, il est naturel de se demander comment décomposer en composantes irréductibles (resp. indécomposables) le produit tensoriel de cette famille de représentations. Ce problème est bien posé grâce au théorème de Krull-Schmidt, qui affirme l’existence d’une telle décomposition en indécomposables, et grâce au théorème de Chevalley selon lequel un produit tensoriel de représentations semi-simples d’un groupe est encore semi-simple. Nous nous intéressons surtout au cas des représentations irréductibles.

Il semble que, pour la plupart des groupes connus, et à l’exception notable des groupes algébriques réductifs connexes, ce problème de décomposition reste aujourd’hui parmi les plus difficiles à comprendre. Par exemple, bien que la théorie des caractères permette d’y répondre pour n’importe quel groupe fini donné, il n’y a pas à ce jour d’approche qui le résolve d’une façon naturelle pour les séries infinies classiques, comme les groupes symétriques ou alternés. Dans la période récente, on s’est donc restreint à des questions de moindre ampleur. Pour le groupe symétrique, on sait par exemple décomposer en composantes irréductibles les produits tensoriels de représentations correspondant à des diagrammes de Young en équerre, ou bien à deux colonnes — le cas général semblant hors de portée.

Parmi ces questions, il en est une qui se pose de façon naturelle pour n’importe quel groupe G . Étant données deux représentations irréductibles de G de

dimension au moins 2, quand le produit tensoriel de ces deux représentations est-il encore irréductible ? Il est clair que cela arrive souvent lorsque G est un produit direct, mais la réponse générale à cette question semble à l'heure actuelle elle-même hors de portée. Encore une fois, cela est facile pour les groupes réductifs connexes : si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple complexe, les produits tensoriels ne sont jamais irréductibles, comme on peut le montrer de plusieurs façons (*cf.* [15], [11, lemme 1]). En revanche, il semble difficile de trouver une raison profonde au fait que cette situation peut se produire pour le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ uniquement si n est un carré parfait, sans parler des séries de groupes infinis discrets.

Néanmoins, I. Zisser a montré de façon algébrique dans [16] que le produit tensoriel de deux représentations irréductibles d'un groupe symétrique donné n'est irréductible que si l'une des deux représentations considérées est de dimension 1. Nous avons donné dans [12] une autre démonstration de ce théorème, qui met en évidence le lien avec le problème correspondant pour les représentations de monodromie d'une extension infinie du groupe considéré, en l'occurrence le groupe de tresses associé. De façon assez logique, et comme le faisait déjà remarquer Brauer [2], le problème de la décomposition des produits tensoriels semble plus simple pour les groupes « continus » que pour les groupes discrets et les représentations de monodromie des groupes discrets infinis proviennent souvent d'une famille à au moins un paramètre de représentations.

1.2. Présentation des résultats. — Nous proposons ici un cadre général pour l'étude de ce problème quand G est le groupe fondamental d'une variété X d'un certain type. Pour ces variétés, il existe une structure naturelle, appelée algèbre d'holonomie et notée $\mathfrak{g}_X$, dont les représentations correspondent aux représentations de monodromie de G sur un fibré vectoriel trivial. On définit une notion intéressante pour notre problème, qui est celle des représentations *agrégantes* de $\mathfrak{g}_X$. Ces représentations apparaissent par familles à un paramètre et possèdent la propriété remarquable que le produit tensoriel de n représentations de ce type est, pour des valeurs génériques des n paramètres correspondants, également agrégant et surtout irréductible si chacune des représentations d'origine l'est.

Nous démontrons ainsi, en section 2, des résultats d'irréductibilité générique pour les produits tensoriels de représentations de monodromie (théorème 1). La section 3 est consacrée à des applications de ce principe général. Dans certains cas, comme les groupes libres, on ne gagne pas grand chose à considérer les choses sous cet angle : il est clair qu'un produit tensoriel de deux représentations irréductibles « génériques » d'un groupe libre sera encore irréductible. En revanche, pour des groupes comme ceux étudiés par Kohno dans [9] qui sont « proches » d'un groupe libre, au sens notamment où ils se plongent dans leur complétion pro-nilpotente, on a, en un certain sens par linéarisation, rendu plus simple le problème d'origine. Plutôt que de multiplier les exemples

en ce sens, nous nous sommes concentrés sur le groupe des tresses pures d'Artin, et montrons qu'un grand nombre de ses représentations usuelles provient de représentations agrégeantes, ce qui permet d'établir l'irréductibilité *a priori* d'un grand nombre de représentations obtenues par produit tensoriel. Parmi ces représentations usuelles, on compte notamment les représentations qui se factorisent par l'algèbre de Hecke de type A ou, plus généralement, par l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami (théorème 2), ainsi que les actions de Yang-Baxter sur les produits tensoriels de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -modules (théorème 3). Une généralisation aux groupes de tresses généralisées est ensuite exposée (théorème 4), puis nous introduisons des « algèbres de Hecke infinitésimales », algèbres de Lie réductives qui rendent compte de la décomposition des produits tensoriels quand on impose un même paramètre générique à la famille de représentations considérées. L'étude de l'image de ces algèbres de Hecke infinitésimales dans la représentation de réflexion nous permet enfin de généraliser (théorème 5) le résultat classique de Kilmoyer d'irréductibilité des puissances alternées de la représentation de réflexion des algèbres de Hecke. En fait, tout *foncteur de Schur* appliqué à ces représentations de réflexion donne lieu, dans le cas générique, à une représentation irréductible du groupe de tresses pures considéré.

2. Approche générale

Dans [9], T. Kohno a montré comment les représentations du complété de Malcev de $\pi_1(X)$ s'obtiennent essentiellement à partir de représentations de l'algèbre de Lie d'holonomie $\mathfrak{g}_X$ sous certaines conditions de théorie de Hodge sur la variété X . Celles-ci sont notamment vérifiées quand

- (i) $X = \mathbb{CP}^N \setminus D$, où D est une hypersurface complexe ;
- (ii) X est une variété compacte lisse kählérienne ;
- (iii) $X = \tilde{X} \setminus D$, avec $\tilde{X}$ une variété algébrique projective lisse de premier nombre de Betti nul et D un diviseur à croisements normaux.

Dans ce qui suit, nous supposons que X est une variété d'un des types précédents. On fixe une fois pour toutes un point base de X et on note $G = \pi_1(X)$. Nous définissons en section 1 l'algèbre de Lie d'holonomie $\mathfrak{g}_X$ de X . C'est une algèbre de Lie graduée que l'on peut définir sur $\mathbb{Q}$, donc sur tout corps de caractéristique 0 par extension des scalaires, et qui est engendrée par $H_1(X, \mathbb{Q})$. Les représentations ρ de $\mathfrak{g}_X$ se déforment naturellement en des familles ρ_h de représentations où h désigne un scalaire. Lorsque le corps de base est (inclus dans) $\mathbb{C}$, elles définissent alors par monodromie des familles à un paramètre de représentations complexes de G . Dans les cas considérés ici, on sait que cette procédure permet de construire une partie importante des représentations de G .

Une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{g}_X$ sera dite *homogène* si elle est engendrée par des éléments de $\mathfrak{g}_X$ qui sont homogènes pour sa graduation naturelle. On fixe

un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique 0, on suppose $\mathfrak{g}_X$ définie sur $\mathbf{k}$, et on introduit la notion suivante :

DÉFINITION 1. — Une représentation ρ d'une algèbre d'holonomie homogène $\mathfrak{g}_X$ est dite *agrégante* relativement à une sous-algèbre homogène $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{g}_X$ si $\text{Res}_{\mathfrak{D}} \rho$ est somme de représentations de dimension 1 deux à deux non isomorphes.

Dans le cas où $\mathbf{k}$ est algébriquement clos, cela revient à dire que $\rho(\mathfrak{D})$ est commutative et que $\text{Res}_{\mathfrak{D}} \rho$ est semi-simple sans multiplicités. Remarquons d'autre part que la condition d'agrégance implique, dans le cas général, la commutativité de $\rho(\mathfrak{D})$. La terminologie utilisée dans la définition 1 est motivée par le théorème suivant, dont la démonstration fait l'objet des sections suivantes :

THÉORÈME 1. — Si $(\rho^{(i)})_{i \in I}$ est une famille finie de représentations agrégantes d'une algèbre d'holonomie homogène $\mathfrak{g}_X$ relativement à une même sous-algèbre homogène $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{g}_X$, alors, pour tout $\underline{h} = (h_i)_{i \in I}$ dans un certain ouvert dense de $\mathbf{k}^I$ pour la topologie de Zariski, la représentation $\otimes^I \rho_{h_i}^{(i)}$ de $\mathfrak{g}_X$ est agrégante relativement à $\mathfrak{D}$. Elle est de plus irréductible (resp. indécomposable) si et seulement si toutes les représentations $\rho^{(i)}$ le sont.

Il est clair que le noyau et le conoyau d'un morphisme de représentations agrégantes est encore une représentation agrégante. On peut alors interpréter le théorème précédent en disant que l'on a défini des sous-catégories abéliennes pleines de la catégorie des représentations de $\mathfrak{g}_X$ qui sont « presque » des sous-catégories tensorielles. Lorsque le corps de base de $\mathfrak{g}_X$ est inclus dans $\mathbb{C}$, on déduira de ce théorème :

COROLLAIRE. — Si l'on a une famille finie $(R_i(h))_{i \in I}$ de représentations de monodromie de $\pi_1(X)$, qui provient d'une famille $\rho^{(i)}$ de représentations irréductibles de $\mathfrak{g}_X$ agrégantes par rapport à une même sous-algèbre homogène $\mathfrak{D}$, il existe un ouvert dense $U \subset \mathbb{C}^I$ tel que $\otimes^I R_i(h_i)$ est irréductible pour tout $\underline{h} = (h_i) \in U$.

Dans ce corollaire, $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie naturelle. On peut définir une propriété plus forte, qui ne fait pas intervenir de choix explicite d'une telle sous-algèbre $\mathfrak{D}$. On rappelle que l'on a une inclusion canonique $H_1(X, \mathbb{Q}) \subset \mathfrak{g}_X$, quel que soit le corps de base $\mathbf{k}$ sur lequel est défini $\mathfrak{g}_X$.

DÉFINITION 2. — On dit d'une représentation ρ de $\mathfrak{g}_X$ qu'elle est *fortement agrégante* si l'image de $H_1(X, \mathbb{Q})$ par ρ contient un endomorphisme diagonalisable sans multiplicités.

Nous démontrons enfin :