

SUR LA RIGIDITÉ DE POLYÈDRES HYPERBOLIQUES EN DIMENSION 3 : CAS DE VOLUME FINI, CAS HYPERIDÉAL, CAS FUCHSIEN

PAR MATHIAS ROUSSET

RÉSUMÉ. — Un polyèdre hyperbolique semi-idéal est un polyèdre dont les sommets sont dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ ou à l'infini. Un polyèdre hyperbolique hyperidéal est, dans le modèle projectif, l'intersection de $\mathbb{H}^3$ avec un polyèdre projectif dont les sommets sont tous en dehors de $\mathbb{H}^3$ et dont toutes les arêtes rencontrent $\mathbb{H}^3$. Nous classifions les polyèdres semi-idéaux en fonction de leur métrique duale, d'après les résultats de Rivin dans [8] (écrit avec C.D. Hodgson) et [7]. Nous utilisons ce résultat pour retrouver la classification des polyèdres hyperidéaux en terme de leur combinatoire et de leurs angles dièdres. Nous généralisons ces résultats au cas des polyèdres fuchsien.

ABSTRACT (*About the Rigidity of Tridimensional Hyperbolic Polyhedra : Finite Volume Case, Hyperideal Case, Fuchsian Case*)

An hyperbolic semi-ideal polyhedron is a polyhedron whose vertices lie inside the hyperbolic space $\mathbb{H}^3$ or at infinity. An hyperideal polyhedron is, in the projective model, the intersection of $\mathbb{H}^3$ with a projective polyhedron whose vertices all lie outside of $\mathbb{H}^3$, and whose edges all meet $\mathbb{H}^3$. We classify semi-ideal polyhedra in terms of their dual metric, using the results of Rivin in [8] (written with C.D. Hodgson) et [7]. This result is used to obtain the classification of hyperideal polyhedra in terms of their combinatorial type and their dihedral angles. These two results are generalized to the case of fuchsian polyhedra.

Texte reçu le 24 février 2003, accepté le 8 août 2003

MATHIAS ROUSSET, Laboratoire de statistique et probabilité, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse cedex 4 (France) • *E-mail* : rousset@cict.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 52A55, 53C45.

Mots clefs. — Géométrie hyperbolique, polyèdres, polyèdres hyperidéaux, variété fuchsienne, rigidité.

1. Introduction

L'objet principal d'étude de cet article est la rigidité des polyèdres hyperboliques. Cauchy a montré la rigidité globale des polyèdres euclidiens, les faces étant fixées à isométrie près. D'une manière générale, un problème de rigidité de polyèdres peut se voir de la manière suivante :

- On considère un certain espace de polyèdres convexes ; on fixe en général le nombre de plans formant le polyèdre, ou bien (et c'est très différent) la combinatoire du polyèdre (*i.e.* la décomposition en arêtes, sommets et faces).
- On considère une application de ces polyèdres vers certaines de leurs caractéristiques, typiquement la longueur des arêtes, la valeur des angles dièdres ou la métrique induite sur le polyèdre.
- On se demande si l'application est localement injective (rigidité locale), ou globalement injective (rigidité globale).

Dans le cas de Cauchy, on fixe la combinatoire du polyèdre et on regarde la longueur des arêtes et la valeur des angles des faces.

On peut être plus ambitieux et essayer de caractériser un ensemble de polyèdres, c'est-à-dire le classer par certaines de ses caractéristiques. On peut par exemple essayer de mettre en bijection les polyèdres de combinatoire fixée Γ avec certaines valeurs de leurs angles dièdres. Ou bien encore, on peut essayer de mettre en bijection les polyèdres avec n sommets avec un certain ensemble de métriques sur la sphère avec n singularités représentant leur géométrie intrinsèque.

1.1. Résultats principaux. — Commençons par rappeler les résultats importants sur la rigidité des polyèdres. Le premier est du à Cauchy :

THÉORÈME 1.1 (Cauchy). — *Soit $\mathcal{P}_{\text{euc},\Gamma}$ l'ensemble des polyèdres euclidiens convexes de combinatoire Γ . L'application qui à un polyèdre de $\mathcal{P}_{\text{euc},\Gamma}$ associe la longueur de ses arêtes et la valeur des angles de ses faces est globalement injective.*

Andreev a montré la rigidité des polyèdres hyperboliques de volume fini dans [2] pour le cas compact, puis le cas du volume fini dans [3] :

THÉORÈME 1.2 (Andreev). — *Soit $\mathcal{P}_{\text{and},\Gamma}$ l'ensemble des polyèdres hyperboliques de volume fini de combinatoire Γ et ayant des angles dièdres inférieurs à $\frac{1}{2}\pi$. L'application qui à un polyèdre de $\mathcal{P}_{\text{and},\Gamma}$ associe la valeur de ses angles dièdres est globalement injective.*

Andreev donne un ensemble de conditions caractérisant les valeurs d'angles dièdres atteints.

On a ensuite une caractérisation très générale des polyèdres hyperboliques de volume fini dont le nombre de faces est fixé mais pas la combinatoire ; cette

caractérisation dépend de la métrique duale (la métrique du « polyèdre dual » plongée dans l'espace de Sitter ou de manière équivalente, la troisième forme fondamentale du polyèdre). On notera $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polyèdres hyperboliques compacts ayant n faces, et $\mathcal{P}_n^{\text{si}}$ l'ensemble des polyèdres hyperboliques de volume fini (on dira aussi semi-idéal) ayant n faces. On définit maintenant les espaces métriques qui vont caractériser ces polyèdres :

DÉFINITION 1.3. — On notera $\mathcal{S}_n$ l'espace des espaces métriques h , tel que h soit homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$, de courbure constante 1, partout à l'exception d'un nombre fini de points où il présente une singularité conique. Les singularités sont numérotées et les espaces métriques sont définis aux isométries préservant les singularités près.

DÉFINITION 1.4. — On notera $\mathcal{M}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ des métriques telles que :

- toutes les singularités ont une courbure strictement négative ;
- toute géodésique fermée a une longueur strictement supérieure à 2π .

On notera $\mathcal{M}_n^{\text{si}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ des métriques telles que :

- toutes les singularités ont une courbure strictement négative ;
- toute géodésique fermée a une longueur supérieure ou égale à 2π ;
- le nombre de géodésiques fermées de longueur 2π est fini et chacune d'entre elles sépare l'espace en deux composantes connexes dont l'une au moins est isométrique à un hémisphère.

À tout polyèdre compact P de $\mathcal{P}_n$ on associe son dual P^* muni de sa métrique induite (cf. section 3). En tant qu'objet intrinsèque, c'est un élément de $\mathcal{S}_n$. On note Φ l'application ainsi définie. On est en mesure de citer des résultats de Rivin [8] et [7], respectivement :

THÉORÈME 1.5 (Rivin). — *L'application Φ est un homéomorphisme de $\mathcal{P}_n$ sur $\mathcal{M}_n$. Autrement dit : les polyèdres compacts sont en bijection avec les métriques duales admissibles (existence et unicité).*

THÉORÈME 1.6 (Rivin). — *Le prolongement par continuité $\tilde{\Phi} : \mathcal{P}_n^{\text{si}} \rightarrow \mathcal{S}_n$ de Φ a exactement pour image $\mathcal{M}_n^{\text{si}}$. Autrement dit : les polyèdres semi-idéaux ont exactement pour métriques duales les métriques admissibles de volume fini (existence).*

Alexandrov [1] a donné antérieurement une caractérisation similaire pour les polyèdres compacts ayant n sommet, simplement en fonction de leur métrique induite ; la condition de borne inférieure pour les longueurs des géodésiques fermées n'apparaît alors pas.

Citons enfin le résultat de Bonahon et Bao [4], qui permet de caractériser les polyèdres hyperboliques hyperidéaux (avec leurs sommets à l'infini et « au-delà » de l'infini, cf. section 4) de combinatoire donnée Γ (dont l'ensemble est noté $\mathcal{P}_\Gamma$) par la donnée de leurs angles dièdres :

THÉOREME 1.7 (Bonahon et Bao). — *On a existence et unicité des polyèdres hyperidéaux (on autorise des sommets idéaux) de combinatoire donnée Γ dont les angles dièdres extérieurs θ_{e_i} (π moins l'angle dièdre) vérifient :*

(C1) *on a $\sum_{i=1}^n \theta_{e_i} \geq 2\pi$ pour toute courbe fermée γ plongée dans le graphe dual Γ^* et passant par les arêtes $e_1, \dots, e_n$; l'égalité ayant lieu très exactement quand γ est le bord d'une face du graphe dual Γ^* correspondant à un sommet idéal du polyèdre initial ;*

(C2) *on a $\sum_{i=1}^n \theta_{e_i} > \pi$ pour tout chemin γ plongé dans Γ^* et joignant deux sommets de Γ^* ayant une même face adjacente, mais tel que γ ne soit pas tout entier contenu dans le bord de cette face.*

Cet article contient les deux résultats principaux suivants :

- La caractérisation des polyèdres convexes hyperboliques à n faces semi-idéaux (avec des sommets à l'infini) en fonction de leur métrique duale. Cette caractérisation comporte comme cas particulier celle des polyèdres compacts et des polyèdres idéaux.
- Une nouvelle démonstration de la caractérisation des polyèdres convexes hyperboliques de combinatoire Γ hyperidéaux (les sommets sont à l'infini ou au-delà) par leurs angles dièdres.

L'idée est de déduire le premier résultat des idées de Rivin dans [8] et [7] ; l'apport nouveau de l'article est l'obtention de la rigidité dans le cas général semi-idéal (section 3) qui manquait dans ces deux articles, en utilisant la transformation de Pogorelov (section 2).

En « tronquant » les sommets hyperidéaux, on en déduit le second énoncé (section 4). Cette partie constitue une preuve indirecte simple, du résultat démontré en détail dans la prépublication de Bonahon et Bao [4].

On montrera que ces caractérisations se généralisent très exactement au cas des polyèdres hyperboliques fuchsien de genre $g \geq 2$ (cf. section 5). En particulier, on obtient ainsi le résultat nouveau suivant de caractérisation des polyèdres hyperidéaux fuchsien :

THÉOREME 1.8. — *On a existence et unicité des polyèdres hyperidéaux fuchsien de genre $g \geq 2$ (on autorise des sommets idéaux) de combinatoire donnée Γ dont les angles dièdres extérieurs θ_{e_i} (π moins l'angle dièdre) vérifient les conditions :*

(CF1) *on a $\sum_{i=1}^n \theta_{e_i} \geq 2\pi$ pour toute courbe fermée contractile γ plongée dans le graphe dual Γ^* et passant par les arêtes $e_1, \dots, e_n$; l'égalité ayant lieu*

très exactement quand γ est le bord d'une face du graphe dual Γ^* correspondant à un sommet idéal du polyèdre initial;

(CF2) on a $\sum_{i=1}^n \theta_{e_i} > \pi$ pour tout chemin γ plongé dans Γ^* et joignant deux sommets A et B de Γ^* ayant une même face F adjacente, mais tel que γ ne soit pas tout entier contenu dans le bord de cette face. On demande que γ soit homotope au chemin bordant F et joignant A à B .

L'analogue des résultats de Rivin [8] et [7] dans le cas fuchsien ont été établis par Schlenker dans [9].

2. La transformation de Pogorelov

Cette section est consacrée à l'étude de la transformation de Pogorelov. On note $\mathbb{R}_p^{n+1}$ l'espace de Minkowski de dimension $n+1$ et de signature $(n+1-p, p)$, et Ω_0 l'intersection d'un demi-espace de vecteur normal de type strictement espace ou strictement temps avec une des deux sphères unités ($p \neq 0$).

La transformation de Pogorelov prend deux objets de Ω_0 ayant la même géométrie intrinsèque induite et les plongent dans $\mathbb{R}_p^n$ ou $\mathbb{R}_{p-1}^n$, les images ayant alors la même géométrie intrinsèque induite. De plus, les images sont identifiées à isométrie près si et seulement si les objets initiaux le sont. Elle va nous permettre de ramener des questions de rigidité de polyèdres dans l'espace de Sitter au problème correspondant dans l'espace euclidien.

2.1. Espaces à courbure constante. — On se propose dans cette sous-section de rappeler succinctement quelques propriétés des espaces homogènes riemanniens et lorentziens à courbure constante. L'espace ambiant est l'espace de Minkowski $\mathbb{R}_p^{n+1}$ muni de sa métrique canonique :

$$\|x\|^2 = -x_1^2 - \cdots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2.$$

On note :

- $\mathbb{S}_p^n = \{x \in \mathbb{R}_p^{n+1}; \|x\| = 1\}$ la sphère unité « à courbure positive »,
- $\mathbb{H}_{p-1}^n = \{x \in \mathbb{R}_p^{n+1}; \|x\| = -1\}$ la sphère unité « à courbure négative ».

Ces sphères sont toutes deux munies de leur métrique induite. On énonce sans démonstration :

THÉOREME 2.1. — *La sphère $\mathbb{S}_p^n$ est une variété pseudo-riemannienne complète de dimension n et de signature $(n-p, p)$. Elle est homogène et a pour courbure constante 1. Son groupe d'isométrie est le groupe des isométries linéaires $O(n+1-p, p)$ de $\mathbb{R}_p^{n+1}$ et son groupe d'isotropie est $O(n+1-p, p-1)$.*

La sphère $\mathbb{H}_{p-1}^n$ est une variété pseudo-riemannienne complète de dimension n et de signature $(n+1-p, p-1)$. Elle est homogène et a pour courbure constante -1 . Son groupe d'isométrie est $O(n+1-p, p)$ et son groupe d'isotropie est $O(n-p, p)$.