Bull. Soc. math. France
132 (2), 2004, p. 263–304

RÉSONANCES DE RAYLEIGH EN DIMENSION 2

PAR DIDIER GAMBLIN

RÉSUMÉ. — Nous étudions les résonances de Rayleigh créées par un obstacle strictement convexe à bord analytique en dimension 2. Nous montrons qu'il existe exactement deux suites de résonances $(z_{k,+})$ et $(z_{k,-})$ convergeant exponentiellement vite vers l'axe réel dans un voisinage polynomial de l'axe réel, et exponentiellement proches d'une suite de quasimodes réels. De plus, $k^{-1}\operatorname{Re} z_{k,\pm}$ est un symbole analytique d'ordre 0 en la variable k^{-1} dont on donne le premier terme du développement. Nous construisons pour cela des quasimodes de Rayleigh dans un voisinage du bord de l'obstacle.

ABSTRACT (*Rayleigh Resonances in Two Dimension*). — We study the Rayleigh resonances that are created by a strictly convex body with analytic boundary in two dimension. In some polynomial neighbourhood of the real axis we prove that exists exactly two sequences of resonances $(z_{k,+})$ and $(z_{k,-})$ converging exponentially to the real axis and exponentially close to a sequence of real quasimodes. Moreover, $k^{-1}\operatorname{Re} z_{k,\pm}$ is a zero order analytic symbol in k^{-1} and we give the first term of his expansion. To prove that, we construct Rayleigh quasimodes in a neighbourhood of the obstacle.

Texte reçu le 11 février 2003, accepté le 25 avril 2003

DIDIER GAMBLIN, LAGA, Institut Galilée, Université de Paris 13, Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse • *E-mail :* gamblin@zeus.math.univ-paris13.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 35P25, 81Q20, 73C02.

Mots clefs. — Ondes de Rayleigh, résonances, construction BKW.

Introduction, notations et résultats

Soient $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ un compact strictement convexe à bord Γ analytique et $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$ son complémentaire. Notons Δ_e l'opérateur d'élasticité

$$\Delta_e u = \mu_0 \Delta u + (\lambda_0 + \mu_0)\nabla(\nabla \cdot u), \qquad u = {}^t(u_1, u_2),$$

où les constantes de Lamé λ_0 et μ_0 vérifient $\mu_0 > 0,\ \lambda_0 + \mu_0 > 0$. Considérons Δ_e dans Ω avec des conditions de Neumann sur le bord Γ

$$(Bu)_i := \sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij}(u)\nu_j = 0, \qquad (i = 1, 2 \text{ sur } \Gamma)$$

où $\sigma_{ij}(u) = \lambda_0 \nabla \cdot u \delta_{ij} + \mu_0(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j)$ est le tenseur des contraintes et ν la normale extérieure à Ω sur Γ.

Pour l'équation des ondes élastiques à l'extérieur d'un obstacle régulier avec condition de Neumann sur le bord M. Taylor [20] a étudié mathématiquement, en dimension quelconque, la propagation des singularités. Trois types de rayons peuvent propager les singularités. D'une part les rayons classiques se réfléchissant au bord de l'obstacle suivant les lois de l'optique géométrique et propageant les singularités aux vitesses $c_1 = (\mu_0)^{\frac{1}{2}}$ et $c_2 = (\lambda_0 + 2\mu_0)^{\frac{1}{2}}$. D'autre part les rayons de Rayleigh propageant les singularités dans le bord de l'obstacle à la vitesse plus lente c_R. On rappelle que $c_R < c_1 < c_2$ et $c_R = c_1 s_0$ où s_0 est l'unique zéro dans $]0, 1[$ de la fonction de Rayleigh

$$\mathcal{R}(s) = (s^2 - 2)^2 - 4(1 - s^2)^{\frac{1}{2}}(1 - c_1^2 c_2^{-2} s^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui fait que même un obstacle strictement convexe est captif pour le problème de Neumann du point de vue de la propagation des singularités. Ce qui n'est pas le cas pour le problème de Dirichlet.

M. Ikehata et G. Nakamura [6] dans le cas de la sphère de $\mathbb{R}^3$, puis M. Kawashita [7] pour un obstacle à bord $\mathcal{C}^\infty$ quelconque en dimension impaire, ont montré que l'énergie locale de l'équation des ondes élastiques pour le problème de Neumann n'a pas la propriété de décroissance uniforme lorsque t tend vers l'infini. Ces phénomènes correspondent à l'existence d'ondes de Rayleigh se propageant au bord de l'obstacle et on s'attendait à ce que cela crée des résonances convergeant rapidement vers l'axe réel.

Il est connu que l'opérateur $-\Delta_e$, agissant sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω à valeurs dans $\mathbb{C}^2$ et vérifiant la condition de Neumann, admet une réalisation auto-adjointe sur $L^2(\Omega; \mathbb{C}^2)$ que l'on notera $-\Delta_e^N$. L'opérateur $-\Delta_e^N$ est positif et n'admet pas de spectre ponctuel. On considère l'ensemble

$$\Lambda = \big\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ |\operatorname{Im}\lambda| \le |\lambda|^{-\delta},\ \operatorname{Re}\lambda \ge C_0\big\}.$$

Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact valant 1 près de Γ ; la résolvante tronquée $R_\chi(\lambda) = \chi(-\Delta_e^N - \lambda^2)^{-1}\chi$, holomorphe pour λ dans Λ avec $\operatorname{Im}\lambda < 0$, se prolonge méromorphiquement à Λ tout entier avec des pôles possibles pour $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Ces pôles sont appelés *résonances* de l'opérateur $-\Delta_e^N$ (voir [11]).

P. Stefanov et G. Vodev [15] ont commencé par montrer que dans le cas de la boule de $\mathbb{R}^3$, il existe une suite de résonances convergeant exponentiellement vite vers l'axe réel. Ils ont ensuite montré (voir [16]) que la convergence était polynomiale, d'abord dans le cas d'un obstacle strictement convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^3$, puis pour un obstacle à bord $\mathcal{C}^\infty$ quelconque en dimension impaire d'espace (voir [17]). J. Sjöstrand et G. Vodev [10] ont donné l'asymptotique du nombre de résonances de Rayleigh dans un domaine proche de l'axe réel de la forme

$$\Lambda := \big\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, |\operatorname{Im}\lambda| \le |\lambda|^{-\delta},\, \operatorname{Re}\lambda \ge C_0\big\}, \qquad (\delta,\, C_0 > 0),$$

pour une classe d'obstacles incluant le cas strictement convexe et en toute dimension d'espace autre que 4. P. Stefanov [13] a donné aussi une très bonne minoration du nombre de résonances de Rayleigh pour un obstacle quelconque en dimension 3. G. Vodev [21] a étendu le résultat obtenu dans le cas de la boule de $\mathbb{R}^3$ à toute dimension impaire d'espace, en montrant que la convergence est exponentielle dès que l'une des composantes connexes de l'obstacle est à bord analytique. Dans le cas d'un obstacle à bord $\mathcal{C}^\infty$ en dimension 3, M. Bellassoued [1] a montré l'existence d'un domaine exponentiellement proche de l'axe réel sans résonance.

Dans le cas d'un obstacle strictement convexe à bord analytique Γ en dimension 2, nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 0.1. — *Il existe deux suites de résonances $z_{k,+}$ et $z_{k,-}$ de Rayleigh* (*comptées avec multiplicités*) *vérifiant*

$$\big|\operatorname{Re} z_{k,+} - \operatorname{Re} z_{k,-}\big| = O\big(\exp(-C\operatorname{Re} z_{k,\pm})\big), \quad \operatorname{Im}(z_{k,\pm}) = O\big(\exp(-C\operatorname{Re} z_{k,\pm})\big)$$

où C est une constante > 0. Ici $k^{-1}\operatorname{Re} z_{k,\pm}$ est un symbole analytique d'ordre 0 de la variable k^{-1} et

$$\operatorname{Re}(z_{k,\pm}) = \frac{2\pi c_R}{\ell(\Gamma)}k + \sum_{m\ge 0} a_m k^{-m}.$$

Soit $\Lambda = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |\operatorname{Im} z| \le |z|^{-\delta},\, \operatorname{Re} z \ge C_0\}$ où $\delta,\, C_0 > 0$. Si C_0 est assez grand, il n'y a pas d'autres résonances de Rayleigh dans Λ que les nombres $z_{k,\pm}$.

L'intérêt de la localisation précise des résonances réside dans le lien avec le problème d'évolution associé (voir [19] et [14]). Il reste donc à préciser le taux de décroissance exponentielle de la partie imaginaire des résonances en fonction de la géométrie de l'obstacle (l'auteur a travaillé dans cette direction [3]) et à étudier l'intéraction qu'il peut exister entre les résonances $z_{k,+}$ et $z_{k,-}$.

1. Autour de la preuve

L'argument de Stefanov et Vodev était basé sur une estimation *a priori* du prolongement méromorphe de la résolvante tronquée et une application du principe de Phragmen-Lindelöf. L'existence de quasimodes contredit alors l'absence de résonance près du réel.

En reprenant l'idée de Stefanov et Vodev, mais en appliquant le principe du maximum dans des petits voisinages d'un quasimode, S.-H. Tang et M. Zworski [18] ont montré, pour des perturbations du laplacien et en toutes dimensions d'espace, que près d'un quasimode réel (pourvu qu'il soit assez grand) existait au moins une résonance. Ensuite, Stefanov [12] a étendu les résultats de Tang et Zworski au cas des quasimodes multiples et des clusters de quasimodes. Il montre que près de chaque groupe de quasimodes existent au moins autant de résonances (comptées avec multiplicités) qu'il y a de quasimodes. Cela permet de localiser les résonances dans des boules et pas seulement près de l'axe réel. Nous allons donc construire des quasimodes pour le système de l'élasticité avec une précision exponentiellement petite.

Introduisons l'opérateur de Dirichlet-Neumann $\mathcal{N}(\lambda)$ défini par

$$\mathcal{N}(\lambda) : H^s(\Gamma) \ni f \longmapsto Bv_{|\Gamma} \in H^{s-1}(\Gamma),$$

où $H^s(\Gamma)$ désigne les espaces de Sobolev usuels sur Γ et v la solution du problème

$$(\Delta_e + \lambda^2)v = 0 \text{ dans } \Omega, \quad v = f \text{ sur } \Gamma, \ v \ \lambda\text{-sortante}.$$

Rappelons que la fonction v est dite λ-*sortante* si pour $r_0 \gg 1$ nous avons

$$v_{||x| \geq r_0} = R_0(\lambda) g_{||x| \geq r_0},$$

où g appartient à $L^2_{\text{comp}}(\Omega)$, est à support indépendant de λ, et $R_0(\lambda)$ est la résolvante libre sortante de $-\Delta_e$ dans $\mathbb{R}^2$; c'est-à-dire que $R_0(\lambda)$ appartient à $\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ pour $\operatorname{Im} \lambda < 0$.

On sait (voir [16] et [21]) que dans la zone elliptique

$$\mathcal{E} = \{\zeta \in T^*\Gamma \,;\, c_1 \|\zeta\| > 1\},$$

$\mathcal{N}(\lambda)$ est un opérateur pseudodifférentiel analytique à grand paramètre λ ayant pour variété caractéristique

$$\Sigma = \{\zeta \in T^*\Gamma \,;\, c_R \|\zeta\| = 1\},$$

où c_R est la vitesse de Rayleigh. C'est l'existence de cette variété caractéristique qui génère les résonances convergeant rapidement vers l'axe réel. Dans le cas de la dimension 2, Σ est simplement la réunion de deux courbes fermées Σ^+ et Σ^-, ce qui explique la simplicité du problème en dimension 2 par rapport aux dimensions supérieures. On va construire des quasimodes localisés près de $\Sigma^\pm$.

Dans la section 2, puisque $\mathcal{O}$ est strictement convexe, nous définissons des coordonnées d'Euler-Gauss dans Ω, c'est-à-dire que l'une des variables, que l'on note θ, est l'angle polaire de la normale au bord Γ et l'autre, que l'on note r, représente la distance à Γ. Nous étendons ensuite ces coordonnées dans un voisinage complexe de Γ. Dans la suite, les variétés sont vues comme des sous-variétés du revêtement universel (via les coordonnées d'Euler-Gauss) des complexifiés de Γ ou Ω ou des fibrés cotangents de ces revêtements.

Dans la section 3, nous construisons quatre lagrangiennes complexes $\Lambda_j^{\pm}$ de dimension 2, incluses respectivement dans $p_j^{-1}(1)$ (les notations $p_1(x,\xi) = c_1^2|\xi|^2$ et $p_2(x,\xi) = c_2^2|\xi|^2$ désignent les valeurs propres du symbole principal semi-classique de $-h^2\Delta_e$) et dont la projection sur $T^*\Gamma$ est $\Sigma^{\pm}$. Assez près de Γ, ces lagrangiennes se projettent régulièrement dans l'espace des configurations.

Dans la section 4, nous construisons deux solutions BKW $u^{\pm}$ du système

$$(-h^2\Delta_e - 1)u = 0 \text{ près de } \Gamma, \quad Bu = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

qui décroissent exponentiellement près du bord de l'obstacle (ici Γ est en fait remplaçé par son revêtement universel). La solution BKW $u^{\pm}$ que l'on obtient vit à la fois sur les deux lagrangiennes $\Lambda_1^{\pm}$ et $\Lambda_2^{\pm}$. Elle est de la forme

$$u^{\pm}(r,\theta;h) = u^{1,\pm}(r,\theta;h)\exp\bigl(i\phi_1^{\pm}(r,\theta)/h\bigr) + u^{2,\pm}(r,\theta;h)\exp\bigl(i\phi_2^{\pm}(r,\theta)/h\bigr)$$

où $u^{j,\pm}(r,\theta;h)$ est un symbole analytique, ce qui permet après ressommation d'obtenir des erreurs exponentiellement petites par rapport à h.

Dans la section 5, nous obtenons une condition de quantification comme condition de recollement de la solution $u^{\pm}$. Nous montrons que la condition de quantification, indépendante de $\pm$, est vérifiée pour un symbole analytique réel h_k d'ordre -1 de la variable k^{-1} $(k \in \mathbb{N}^*)$ dont le premier terme du développement est $\ell(\Gamma)/(2\pi c_R)\,k^{-1}$. Pour cela nous démontrons des résultats sur la composition par rapport à la variable h des symboles analytiques ne dépendant que de h.

Dans la section 6, nous montrons qu'il existe deux résonances $z_{k,+}$ et $z_{k,-}$ (comptées avec multiplicités) exponentiellement proches (en la variable k) de chaque nombre $1/h_k$ et que dans un domaine de la forme

$$\Lambda := \bigl\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, |\operatorname{Im}\lambda| \le |\lambda|^{-\delta},\ \operatorname{Re}\lambda \ge C_0\bigr\},$$

il n'y a pas d'autres résonances que celles-là. D'après la section 5, les parties réelles des résonances sont donc des symboles analytiques d'ordre 1 et le premier terme de leur développement est $2\pi c_R/\ell(\Gamma)\,k$.

Pour cela, à l'aide des solutions BKW $u^{\pm}$, nous construisons, pour h appartenant à $\{h_k\,;\, k \in \mathbb{N}^*\}$, des fonctions $W^{\pm}(h)$ à support compact dans Ω, de norme 1 dans $L^2(\Omega)$ et vérifiant

$$\begin{cases} (-h^2\Delta_e - 1)W^{\pm}(h) = O\bigl(\exp(-C/h)\bigr) & \text{dans } \Omega, \\ \bigl(W^+(h) \mid W^-(h)\bigr)_{L^2(\Omega)} = O\bigl(\exp(-C/h)\bigr), & \\ BW^{\pm}(h) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$