Bull. Soc. math. France
132 (4), 2004, p. 477–508

PROPRIÉTÉS (Q) ET (C). VARIÉTÉ COMMUTANTE

PAR JEAN-YVES CHARBONNEL

RÉSUMÉ. — Soient X une variété algébrique complexe, lisse, irréductible, E et F deux espaces vectoriels complexes de dimension finie et μ un morphisme de X dans l'espace $\mathrm{Lin}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Pour $x \in X$, on note $E(x)$ et $x \cdot E$ le noyau et l'image de $\mu(x), \overline{\mu}_x$ le morphisme de X dans $\mathrm{Lin}(E(x), F/(x \cdot E))$ qui associe à y l'application linéaire $v \mapsto \mu(y)(v) + x \cdot E$. Soit i_μ la dimension minimale de $E(x)$. On dit que μ a *la propriété* (**R**) *en* x si $\mathrm{i}_{\overline{\mu}_x}$ est inférieur à i_μ. Soient F^* le dual de F, $\mathrm{S}(F)$ l'algèbre symétrique de F, $\mathcal{I}_\mu$ l'idéal de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ engendré par les fonctions $(x, v') \mapsto \langle v', \mu(x)(v)\rangle$ où v est dans E et $\mathfrak{C}_\mu$ la sous-variété des zéros dans $X \times F^*$ de $\mathcal{I}_\mu$. Désignant par $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ le radical de $\mathcal{I}_\mu$, par Σ le support de $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}/\mathcal{I}_\mu$ dans $X \times F^*$ et par S la projection de Σ sur X, le premier résultat principal de ce mémoire dit que sous deux conditions techniques sur μ, S est une partie fermée de X dont la codimension est supérieure à 2 si et seulement si l'adhérence de l'ensemble des points de X en lesquels μ n'a pas la propriété (**R**), a une codimension supérieure à 2.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On dit que $\mathfrak{g}$ a la *propriété* (**C**) *en l'élément* ξ *de* $\mathfrak{g}$ si l'application adjointe de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$ a la propriété (**R**) en ξ et que $\mathfrak{g}$ a la *propriété* (**Q**) *en l'élément* v' *de* $\mathfrak{g}^*$ si l'application coadjointe de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathrm{Lin}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ a la propriété (**R**) en v'. L'algèbre $\mathfrak{g}$ a la propriété (**Q**) en v' si et seulement si l'indice du stabilisateur $\mathfrak{g}(v')$ de v' est égal à l'indice de $\mathfrak{g}$. Le deuxième résultat principal dit qu'une algèbre de Lie réductive a la propriété (**Q**) en tout point de $\mathfrak{g}^*$.

Texte reçu le 8 novembre 2001, révisé les 26 juillet 2002 et 30 janvier 2003, accepté le 30 juin 2003

JEAN-YVES CHARBONNEL, Université Paris 7 – CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, Théorie des groupes, Case 7012, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France)
E-mail : jyc@math.jussieu.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14A10, 14L17, 22E20, 22E46.

Mots clefs. — Indice, algèbre de Lie, endomorphisme linéaire, codimension, variété algébrique.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2004/477/$ 5.00
© Société Mathématique de France

ABSTRACT (*Properties* (**Q**) *and* (**C**). *Commuting variety*). — Let X be a complex, smooth, irreducible algebraic variety, E and F be two finite dimensional complex vector spaces and μ be a morphism from X to the space $\mathrm{Lin}(E,F)$ of linear maps from E to F. For x in X, we denote by $E(x)$ and $x\cdot E$ the kernel and the image of $\mu(x)$, and by $\overline{\mu}_x$ the morphism from X to $\mathrm{Lin}(E(x),F/(x\cdot E))$ which associates to y the linear map $v\mapsto \mu(y)(v)+x\cdot E$. Let i_μ be the smallest dimension of $E(x)$. We say that μ has *property* (**R**) *at* x if $\mathrm{i}_{\overline{\mu}_x}$ is not greater than i_μ. Let F^* be the dual of F, $\mathrm{S}(F)$ be the symmetric algebra of F, $\mathcal{I}_\mu$ be the ideal of $\mathcal{O}_X\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}(F)$ generated by the functions $(x,v')\mapsto\langle v',\mu(x)(v)\rangle$ where v is in E and $\mathfrak{C}_\mu$ be the subvariety of zeros in $X\times F^*$ of $\mathcal{I}_\mu$, $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ be the radical of $\mathcal{I}_\mu$, Σ be the support of $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}/\mathcal{I}_\mu$ in $X\times F^*$ and S be the projection of Σ on X. The first main result says that under two technical conditions on μ, S is a closed subset of X whose codimension is at least equal to 2 if and only if the closure of the subset of points in X at which μ has not property (**R**), has codimension at least equal to 2.
Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra. We say that $\mathfrak{g}$ has the *property* (**C**) *at the element* ξ *of* $\mathfrak{g}$ if the adjoint map from $\mathfrak{g}$ to the space of linear endomorphisms of $\mathfrak{g}$ has the property (**R**) at ξ and that $\mathfrak{g}$ has the *property* (**Q**) *at the element* v' *of* $\mathfrak{g}^*$ if the coadjoint map from $\mathfrak{g}^*$ to $\mathrm{Lin}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*)$ has the property (**R**) at v'. The algebra $\mathfrak{g}$ has the property (**Q**) at v' if and only if the index of the stabilizer $\mathfrak{g}(v')$ of v' is equal to the index of $\mathfrak{g}$. The second main result says that any reductive Lie algebra has property (**Q**) at any point of $\mathfrak{g}^*$.

1. Introduction

Le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On fixe une fois pour toutes une variété algébrique X, lisse et irréductible, E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et μ un morphisme de X dans l'espace $\mathrm{Lin}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Pour tout point x de X, on note respectivement $E(x)$ et $x\cdot E$ le noyau et l'image de $\mu(x)$. On utilise la topologie de Zariski sur les variétés algébriques considérées. On appelle *grand ouvert* de X un ouvert dont le complémentaire est de codimension supérieure à 2 dans X. Sauf mention contraire, on entend par point de X un point fermé. Conformément à l'usage, $\mathbb{C}[X]$ désigne l'anneau des fonctions régulières sur X, $\mathcal{O}_X$ désigne le faisceau structural de X et $\mathcal{O}_{X,x}$ désigne l'anneau local au point x de X.

Soient θ le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\mathcal{O}_X\otimes_{\mathbb{C}}E\longrightarrow\mathcal{O}_X\otimes_{\mathbb{C}}F,\quad \varphi\otimes v\longmapsto\big(x\mapsto\varphi(x)\mu(x)(v)\big)$$

et $\mathcal{M}_\mu$ le sous-$\mathcal{O}_X$-module des sections locales φ de $\mathcal{O}_X\otimes_{\mathbb{C}}F$ qui satisfont la condition suivante : $x\cdot E$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans le domaine de définition de φ. Par définition, l'image de θ est un sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{M}_\mu$. On s'intéresse alors à la propriété (**P**) pour le morphisme μ : l'image de θ et le faisceau $\mathcal{M}_\mu$ ont même restriction à un grand ouvert de X. L'étude de la propriété (**P**) dégage la notion d'ouverts admissibles pour μ qui est donnée dans la définition 2.7. Le théorème 2.9 dit alors que μ a la propriété (**P**) si la réunion des ouverts admissibles pour μ est un grand ouvert de X. Considérant la dimension minimale i_μ des noyaux $E(x)$, on introduit dans la définition 3.1 la propriété $(\mathbf{R})$ en un point x de X pour le morphisme μ. Le théorème 3.3 dit alors que sous deux conditions techniques sur le morphisme μ, la propriété $(\mathbf{P})$ pour le morphisme μ est équivalente à la propriété $(\mathbf{R})$ pour μ en tout point d'un grand ouvert de X. Soient F^* le dual de F et $\mathrm{S}(F)$ l'algèbre symétrique de F. On désigne par $\mathfrak{C}_\mu$ l'ensemble des points (x,v') de $X \times F^*$ tels que le noyau de v' contient $x \cdot E$, et par $\mathcal{I}_\mu$ l'idéal de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ engendré par les fonctions $(x,v') \mapsto \langle v', \mu(x)(v)\rangle$ où v est dans V. Par définition, $\mathcal{I}_\mu$ est contenu dans l'idéal de définition de $\mathfrak{C}_\mu$ dans $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(F)$ et $\mathfrak{C}_\mu$ est la variété des zéros de $\mathcal{I}_\mu$ dans $X \times F^*$. La question de savoir si l'idéal $\mathcal{I}_\mu$ est un idéal radiciel est bien naturelle ; le théorème 4.1 donne une réponse partielle. Désignant par $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ le radical de $\mathcal{I}_\mu$, le théorème 4.1 dit que sous les conditions techniques du théorème 3.3, les faisceaux $\mathcal{I}_\mu$ et $\sqrt{\mathcal{I}_\mu}$ sur X ont même restriction à un grand ouvert de X si et seulement si μ a la propriété $(\mathbf{R})$ en tout point d'un grand ouvert de X.

On applique enfin ces résultats dans le cas particulier où X est la variété sous-jacente à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ou à son dual $\mathfrak{g}^*$. Dans le cas où X est égal à $\mathfrak{g}$, on note μ le morphisme qui à x associe l'endomorphisme $\operatorname{ad} x$ de $\mathfrak{g}$ et dans le cas où X est égal à $\mathfrak{g}^*$, on note ν l'application qui à l'élément x de $\mathfrak{g}^*$ associe l'application linéaire $v \mapsto v \cdot x$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^*$ où $v \cdot x$ désigne l'action coadjointe de v sur x. La propriété $(\mathbf{R})$ pour μ est appelée propriété $(\mathbf{C})$ pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et la propriété $(\mathbf{R})$ pour ν est appelée propriété $(\mathbf{Q})$ pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La variété $\mathfrak{C}_\mu$ est la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ des éléments (ξ, v') de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ où ξ appartient au stabilisateur de v' dans $\mathfrak{g}$ et la variété $\mathfrak{C}_\nu$ est isomorphe à la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$. On désigne par $I_\mathfrak{g}$ l'espace des sections globales de $\mathcal{I}_\mu$. On a alors le théorème :

Théorème. — *Soit Σ le support dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ du $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}(\mathfrak{g})$-module $\sqrt{I_\mathfrak{g}}/I_\mathfrak{g}$.*

(i) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{C})$ en tout point d'un grand ouvert de $\mathfrak{g}$ si et seulement si la projection de Σ sur $\mathfrak{g}$ est une sous-variété fermée de codimension supérieure à 2 de $\mathfrak{g}$.*

(ii) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété $(\mathbf{Q})$ en tout point d'un grand ouvert de $\mathfrak{g}^*$ si et seulement si la projection de Σ sur $\mathfrak{g}^*$ est une sous-variété fermée de codimension supérieure à 2 de $\mathfrak{g}^*$.*

Par définition, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite quadratique lorsque ses modules adjoint et coadjoint sont isomorphes. Les propriétés $(\mathbf{C})$ et $(\mathbf{Q})$ pour une algèbre de Lie quadratique sont donc équivalentes. En outre, dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quadratique, la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ s'identifie à la variété des éléments (ξ, η) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui commutent entre eux. Pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie quelconque, on appelera variété commutante de $\mathfrak{g}$ la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ ci-dessus. En général, l'idéal $I_\mathfrak{g}$ n'est pas radiciel et la variété $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ n'est pas irréductible. R.W. Richardson a montré dans [4] que $\mathfrak{C}_\mathfrak{g}$ est une variété irréductible dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive. On rappelle que l'indice de $\mathfrak{g}$ est la dimension minimale des stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$ des éléments de $\mathfrak{g}^*$. Dire que $\mathfrak{g}$ a la propriété (**Q**) en v' revient à dire que l'indice de $\mathfrak{g}(v')$ est égal à l'indice de $\mathfrak{g}$. En général, une algèbre de Lie complexe n'a pas la propriété (**Q**). L'indice d'une algèbre de Lie réductive est égal à son rang. On montre alors le théorème :

THÉORÈME. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive complexe. Alors l'indice du centralisateur de tout élément de $\mathfrak{g}$ est égal au rang de $\mathfrak{g}$.*

Ce résultat avait été conjecturé par A.G. Elashvili. Cette question a été étudiée par D.I. Panyushev dans [3] où il y donne des résultats partiels. En outre, P. Tauvel a montré dans [7] que pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie réductive, le centralisateur d'un élément de $\mathfrak{g}$ est commutatif si et seulement si cet élément est régulier. La propriété (**Q**) pour $\mathfrak{g}$ redonne ce résultat car l'indice d'une algèbre commutative est égal à sa dimension. Le point clé de la démonstration de ce théorème est le résultat de J. Dixmier sur les champs de vecteurs adjoints d'une algèbre de Lie réductive [2]. Le cas des algèbres de Lie est la motivation principale de ce mémoire dont la suite se divise en quatre sections :

2) la propriété (**P**),
3) les propriétés (**P**) et (**R**),
4) application de la propriété (**R**),
5) application aux algèbres de Lie.

Je remercie vivement N. Ressayre pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses nombreuses suggestions. Je lui dois en particulier la présentation et les formulations des définitions des propriétés (**P**) et (**R**) et du théorème 2.9.

2. La propriété (P)

Soit μ une application régulière de X dans l'espace $\mathrm{Lin}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F.

DÉFINITION 2.1. — On appelle *indice* de μ et on note i_μ la plus petite des dimensions des noyaux des applications linéaires $\mu(x)$ où x est dans X. On désigne par X_{r} l'ensemble des points x de X pour lesquels i_μ est la dimension du noyau de $\mu(x)$.

D'après un lemme d'algèbre linéaire :

Soit L_r l'ensemble des applications linéaires de rang r de E dans F. Alors L_r est une partie localement fermée de $\mathrm{Lin}(E,F)$ *et son adhérence est la réunion des L_s où s est inférieur à r. En outre, l'application $u \mapsto \mathrm{Ker}\, u$ est une application régulière de L_r dans la grassmannienne* $\mathrm{Gr}_{\dim E-r}(E)$ *et l'application qui à u associe l'image de u est une application régulière de L_r dans* $\mathrm{Gr}_r(F)$, L'ensemble X_{r} est ouvert dans X, l'application $x \mapsto E(x)$ de X_{r} dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{i}_\mu}(E)$ est régulière et l'application $x \mapsto x \cdot E$ de X_{r} dans $\mathrm{Gr}_{\dim E - \mathrm{i}_\mu}(F)$ est régulière. Puisque X est une variété lisse, l'application régulière $x \mapsto E(x)$ de X_{r} dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{i}_\mu}(E)$ se prolonge à un grand ouvert de X d'après [5, ch. VI, th. 1]. On note X_* la réunion des ouverts de X auxquels l'application $x \mapsto E(x)$ de X_{r} dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{i}_\mu}(E)$ a un prolongement régulier. En particulier, X_* est un grand ouvert de X qui contient X_{r} et il existe une application régulière α_μ de X_* dans $\mathrm{Gr}_{\mathrm{i}_\mu}(E)$ pour laquelle $\alpha_\mu(x)$ est égal à $E(x)$ pour tout x dans X_{r}.

Définition 2.2. — Soit θ le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules :

$$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} E \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} F, \quad \varphi \otimes v \longmapsto \big(x \mapsto \varphi(x)\mu(x)(v)\big),$$

où φ est une section locale de $\mathcal{O}_X$ et où v est dans E. Soit $\mathcal{M}_\mu$ le sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} F$ défini par la condition suivante : pour tout ouvert V de X, φ est section de $\mathcal{M}_\mu$ au-dessus de V si et seulement si $x \cdot E$ contient $\varphi(x)$ pour tout x dans V. On dira que μ a la propriété (**P**) si $\mathcal{M}_\mu$ et l'image de θ ont même restriction à X_*.

Dans la suite de cette section, on suppose X égal à X_*.

2.1. Il est clair que $\mathcal{M}_\mu$ contient l'image de θ et on montre facilement que $\mathcal{M}_\mu$ et l'image de θ ont même restriction à X_{r}.

Lemme 2.3. — (i) *La réunion de X_{r} et des ouverts de X qui satisfont les conditions suivantes*

1) *Y est un ouvert affine de X tel que $Y \backslash X_{\mathrm{r}}$ est un diviseur premier de Y dont l'idéal de définition dans $\mathbb{C}[Y]$ est engendré par un élément q,*
2) *il existe un sous-espace $\mathfrak{m}$ de E qui est un supplémentaire de $\alpha_\mu(x)$ dans E pour tout x dans Y,*
3) *la dimension de $E(x)$ est constante sur $Y \backslash X_{\mathrm{r}}$,*

est un grand ouvert de X.

(ii) *Si $\mathcal{M}_\mu$ et l'image de θ ont même restriction à un grand ouvert de X, alors μ a la propriété* (**P**).

Démonstration. — (i) On note S la réunion du lieu singulier de $X \backslash X_{\mathrm{r}}$ et des composantes irréductibles de $X \backslash X_{\mathrm{r}}$ de codimension supérieure à 2 dans X. Alors $X \backslash S$ est un grand ouvert de X et l'intersection de $X \backslash X_{\mathrm{r}}$ avec $X \backslash S$ est une hypersurface lisse ; or X est lisse ; donc $X \backslash S$ est recouvert par des ouverts qui satisfont la condition 1). Soient $T_1, \ldots, T_\ell$ les composantes irréductibles de l'intersection de $X \backslash X_{\mathrm{r}}$ et de $X \backslash S$. Pour $i = 1, \ldots, \ell$, on désigne par T'_i l'ensemble des points x de T_i pour lesquels $E(x)$ est de dimension minimale. Alors $T_i \backslash T'_i$ est fermé dans $X \backslash S$ et de codimension supérieure à 2 ; donc le complémentaire dans $X \backslash S$ de la réunion des ensembles $T_1 \backslash T'_1, \ldots, T_\ell \backslash T'_\ell$ est un grand ouvert de X. En outre, il est réunion d'ouverts affines qui satisfont les