Bull. Soc. math. France
132 (4), 2004, p. 569–589

COHOMOLOGIE ET K-THÉORIE ÉQUIVARIANTES DES VARIÉTÉS DE BOTT-SAMELSON ET DES VARIÉTÉS DE DRAPEAUX

PAR MATTHIEU WILLEMS

RÉSUMÉ. — L'objet de cet article est de calculer la cohomologie et la K-théorie équivariantes des variétés de Bott-Samelson (théorèmes 3.3 et 4.3) et d'en déduire des résultats sur les variétés de drapeaux des groupes de Kac-Moody. Dans la section 3, on retrouve la formule de restriction aux points fixes de la base $\{\widehat{\xi}^w\}_{w\in W}$ de $H_T^*(G/B)$ (théorème 3.9) prouvée par Sara Billey dans [4]. Dans la section 4, on donne l'expression explicite de la restriction aux points fixes de la base $\{\widehat{\psi}^w\}_{w\in W}$ de $K_T(G/B)$ définie par Kostant et Kumar dans [13] (théorème 4.7). Dans le cas fini, cette étude nous permet également de calculer la matrice de changement de bases entre $\{\widehat{\psi}^w\}_{w\in W}$ et $\{*[\mathcal{O}_{\overline{X}_w}]\}_{w\in W}$ (théorème 4.11).

ABSTRACT (*Equivariant cohomology and K-theory of Bott-Samelson varieties and flag varieties*)

The aim of this text is to compute the equivariant cohomology and K-theory of Bott-Samelson varieties (theorem 3.3 and 4.3) and to deduce results about flag varieties of Kac-Moody groups. In section 3, we give a new proof of the formula for the restriction to fixed points of the basis $\{\widehat{\xi}^w\}_{w\in W}$ of $H_T^*(G/B)$ (theorem 3.9) proved by Sara Billey in [4]. In section 4, we give an explicit formula for the restriction to fixed points of the basis $\{\widehat{\psi}^w\}_{w\in W}$ of $K_T(G/B)$ defined by Kostant and Kumar in [13] (theorem 4.7). In the finite case, we describe how the basis $\{*[\mathcal{O}_{\overline{X}_w}]\}_{w\in W}$ transforms with respect to the basis $\{\widehat{\psi}^w\}_{w\in W}$ (theorem 4.11).

Texte reçu le 10 décembre 2002, accepté le 16 octobre 2003

MATTHIEU WILLEMS, U.F.R. de Mathématiques, Université Paris 7 Denis Diderot, 2 place Jussieu, case 7012, 75251 Paris Cedex 05 (France) • *E-mail :* `willems@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 19L47, 55N91.

Mots clefs. — K-théorie, cohomologie équivariante.

En rédigeant cet article, j'ai eu connaissance de résultats de William Graham qui prouve la formule du théorème 4.7 de deux manières différentes dans la prépublication [9]. Une de ses deux démonstrations est similaire à celle développée dans la section 5, où on donne une démonstration purement combinatoire du théorème 4.7. Dans [9], William Graham donne également des formules explicites pour la restriction aux points fixes des classes $[\mathcal{O}_{\overline{X}_w}]$.

Je remercie Michèle Vergne de m'avoir conseillé de regarder ce problème et Alberto Arabia de m'avoir fait comprendre la structure des variétés de Bott-Samelson et de leur cohomologie.

1. Préliminaires et notations

1.1. Algèbres de Kac-Moody. — Les définitions et les résultats qui suivent sur les algèbres de Kac-Moody sont exposés dans [11] et [15]. Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le r}$ une matrice de Cartan généralisée (c'est-à-dire telle que $a_{ii} = 2$, $-a_{ij} \in \mathbb{N}$ si $i \neq j$, et $a_{ij} = 0$ si et seulement si $a_{ji} = 0$). On choisit un triplet $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$ (unique à isomorphisme près), où $\mathfrak{h}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2r - \operatorname{rg}(A)$, $\pi = \{\alpha_i\}_{1\le i\le r} \subset \mathfrak{h}^*$ et $\pi^\vee = \{h_i\}_{1\le i\le r} \subset \mathfrak{h}$ sont des ensembles d'éléments linéairement indépendants vérifiant $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$. L'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ est l'algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$ engendrée par $\mathfrak{h}$ et par les symboles e_i et f_i ($1 \le i \le r$) soumis aux relations $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, $[h, e_i] = \alpha_i(h)e_i$, $[h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$ et tout $1 \le i \le r$, $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_j$ pour tout $1 \le i,j \le r$, et

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0 = (\operatorname{ad} f_i)^{1-a_{ij}}(f_j), \quad \text{pour tous } 1 \le i \neq j \le r.$$

L'algèbre $\mathfrak{h}$ s'injecte canoniquement dans $\mathfrak{g}$. On l'appelle la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Delta_+} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}),$$

où $\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \text{ tels que } [h, x] = \lambda(h)x,\ \forall h \in \mathfrak{h}\}$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, et où on définit Δ_+ par $\Delta_+ = \{\alpha \in \sum_{i=1}^r \mathbb{N}\alpha_i \text{ tels que } \alpha \neq 0 \text{ et } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$. On pose $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ où $\Delta_- = -\Delta_+$. On appelle Δ_+ (respectivement Δ_-) l'ensemble des racines positives (respectivement négatives). Les racines $\{\alpha_i\}_{1\le i\le r}$ sont appelées les racines simples. On définit une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$.

On associe au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le groupe de Weyl $W \subset \operatorname{Aut}(\mathfrak{h}^*)$, engendré par les réflexions simples $\{s_i\}_{1\le i\le r}$, où $s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Le groupe W étant un groupe de Coxeter, on a une notion d'ordre de Bruhat qu'on note $u \le v$ et une notion de longueur qu'on note $\ell(w)$. On note 1 l'élément neutre de W et dans le cas fini (*i.e.* W fini $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ de dimension finie), on note w_0 le plus grand élément de W. Le groupe de Weyl préserve Δ. On pose $R = W\pi$

et $R^+ = R \cap \Delta_+$. Pour $\beta = w\alpha_i \in R^+$, on pose $s_\beta = ws_iw^{-1} \in W$ (qui est indépendant du choix du couple (w, α_i) vérifiant $\beta = w\alpha_i$). Pour un élément w de W, on définit l'ensemble $\Delta(w)$ des inversions de w par $\Delta(w) = \Delta_+ \cap w^{-1}\Delta_-$.

On fixe un réseau $\mathfrak{h}_\mathbb{Z} \subset \mathfrak{h}$ tel que :

(i) $\mathfrak{h}_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C} = \mathfrak{h}$,

(ii) $h_i \in \mathfrak{h}_\mathbb{Z}$ pour tout $1 \leq i \leq r$,

(iii) $\mathfrak{h}_\mathbb{Z} / \sum_{i=1}^r \mathbb{Z} h_i$ est sans torsion,

(iv) $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*_\mathbb{Z} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ $(\subset \mathfrak{h}^*)$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

On choisit des poids fondamentaux $\rho_i \in \mathfrak{h}^*_\mathbb{Z}$ $(1 \leq i \leq r)$ vérifiant $\rho_i(h_j) = \delta_{i,j}$, pour tous $1 \leq i, j \leq r$. On pose $\rho = \sum_{i=1}^r \rho_i$.

1.2. Groupes de Kac-Moody et variétés de drapeaux. — On note $G = G(A)$ le groupe de Kac-Moody associé à $\mathfrak{g}$ par Kac et Peterson dans [12]. On note e l'élément neutre de G. Dans le cas fini, G est un groupe de Lie semi-simple complexe connexe et simplement connexe. On note $H \subset B \subset G$ les sous-groupes de G associés respectivement à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b}$. Soit K la forme unitaire standard de G et $T = K \cap H$ le tore maximal de K associé à $\mathfrak{h}$. On note $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T. Soit $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G, le groupe quotient $N_G(H)/H$ s'identifie à W. On pose $X = G/B = K/T$. On fait agir H sur X par multiplication à gauche, ce qui induit une action de T sur X. Pour $w \in W$, on définit $C(w) = B \cup BwB$, et pour toute racine simple α, on note P_α le sous-groupe de G défini par $P_\alpha = C(s_\alpha)$ de G. On a la décomposition de Bruhat $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$ et si on pose $X_w = BwB/B$, $X = \bigsqcup_{w \in W} X_w$. Pour tout $w \in W$, l'adhérence $\overline{X}_w$ de la cellule X_w est une sous-variété T-invariante de X et $\overline{X}_w = \bigsqcup_{w' \leq w} X_{w'}$ (voir [15]). On obtient ainsi une décomposition cellulaire T-invariante de X.

1.3. Le monoïde $\underline{W}$. — On définit le monoïde $\underline{W}$ comme le monoïde engendré par les éléments $\{\underline{s}_i\}_{1 \leq i \leq r}$ soumis aux relations $\underline{s}_i^2 = \underline{s}_i$ et aux mêmes relations de tresses que les éléments s_i de W. D'après l'étude générale des algèbres de Hecke, l'ensemble $\underline{W}$ s'identifie à l'ensemble W. Pour un élément w de W, on note $\underline{w}$ l'élément correspondant dans $\underline{W}$ défini par $\underline{w} = \underline{s}_{i_1} \cdots \underline{s}_{i_\ell}$ si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ est une décomposition réduite de w, et pour $\underline{v} \in \underline{W}$, on note v l'élément associé dans W. On a dans $\underline{W}$ les relations suivantes :

$$\underline{w}\,\underline{s}_i = \begin{cases} \underline{w}\,\underline{s}_i & \text{si } ws_i > w, \\ \underline{w} & \text{si } ws_i < w\,; \end{cases} \tag{1}$$

$$\underline{s}_i\underline{w} = \begin{cases} \underline{s}_i\underline{w} & \text{si } s_i\,w > w, \\ \underline{w} & \text{si } s_i\,w < w. \end{cases} \tag{2}$$

2. Variétés de Bott-Samelson

Les variétés de Bott-Samelson désingularisent les variétés de Schubert. Elles ont une structure géométrique relativement simple et possèdent en particulier des décompositions cellulaires où chaque adhérence de cellule est elle-même une variété de Bott-Samelson et est donc une sous-variété lisse. Le calcul de la cohomologie et de la K-théorie équivariantes de ces variétés pourra donc être effectué à l'aide de la formule de localisation.

Soit N un entier strictement positif. Considérons une suite de N racines simples μ_1, …, μ_N non nécessairement distinctes. On pose $G_i = P_{\mu_i}$ pour $1 \leq i \leq N$. On définit la variété de Bott-Samelson $\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_N)$ par

$$\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_N) = G_1 \times_B G_2 \times_B \cdots \times_B G_N/B,$$

comme l'espace des orbites de B^N dans $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_N$, sous l'action à droite de B^N définie par

$$(g_1, g_2, \ldots, g_N)(b_1, b_2, \ldots, b_N) = (g_1 b_1, b_1^{-1} g_2 b_2, \ldots, b_{N-1}^{-1} g_N b_N),$$

où $b_i \in B$ et $g_i \in G_i$. On note $[g_1, g_2, \ldots, g_N]$ la classe de $(g_1, g_2, \ldots, g_N)$ dans $\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_N)$. On note $g_{\mu_i} \in G_i$ un représentant quelconque de la réflexion de $N_{G_i}(H)/H$. Dans la suite, on note $\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_N)$ par Γ. C'est une variété projective irréductible et lisse.

On définit une action à gauche de H sur Γ par

$$h[g_1, g_2, \ldots, g_N] = [hg_1, g_2, \ldots, g_N], \quad h \in H,\ g_i \in G_i.$$

On obtient ainsi une action de T par restriction.

On pose $\mathcal{E} = \{0,1\}^N$. Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on note $\Gamma_\varepsilon \subset \Gamma$ l'ensemble des classes $[g_1, g_2, \ldots, g_N]$ qui vérifient pour tout entier i compris entre 1 et N

$$g_i \in B \text{ si } \varepsilon_i = 0, \quad g_i \notin B \text{ si } \varepsilon_i = 1.$$

On vérifie immédiatement que cette définition est bien compatible avec l'action de B^N. On munit $\mathcal{E}$ d'une structure de groupe en identifiant $\{0,1\}$ avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on note $\pi_+(\varepsilon)$ l'ensemble des entiers i tels que $\varepsilon_i = 1$ et $\pi_-(\varepsilon)$ l'ensemble des entiers i tels que $\varepsilon_i = 0$. On pose $\ell(\varepsilon) = \mathrm{card}(\pi_+(\varepsilon))$. On note $(i) \in \mathcal{E}$ l'élément de $\mathcal{E}$ défini par $(i)_j = \delta_{i,j}$ et $(\mathbf{1})$ l'élément défini par $(\mathbf{1})_j = 1$ pour tout j. Pour $\varepsilon \in \mathcal{E}$, on pose

$$v_i(\varepsilon) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq i,\\ k \in \pi_+(\varepsilon)}} s_{\mu_k}$$

($v_i(\varepsilon) = 1$ si $\{1 \leq k \leq i, k \in \pi_+(\varepsilon)\} = \varnothing$), $v(\varepsilon) = v_N(\varepsilon)$ et $\alpha_i(\varepsilon) = v_i(\varepsilon)\mu_i$. Pour $i \leq j$, on définit également

$$v_i^j(\varepsilon) = \prod_{\substack{i \leq k \leq j,\\ k \in \pi_+(\varepsilon)}} s_{\mu_k}.$$

De plus, si $j < i$, on pose $v_i^j(\varepsilon) = 1$. On définit de même

$$\underline{v}(\varepsilon) = \prod_{\substack{1\le k\le N,\\ k\in\pi_+(\varepsilon)}} \underline{s}_{\mu_k} \in \underline{W}.$$

On définit un ordre sur $\mathcal{E}$ par

$$\varepsilon \le \varepsilon' \iff \pi_+(\varepsilon) \subset \pi_+(\varepsilon').$$

On démontre alors facilement la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — (i) *Pour tout* $\varepsilon \in \mathcal{E}$, Γ_ε *est un espace affine de dimension réelle* $2\ell(\varepsilon)$.

(ii) *Pour tout* $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\overline{\Gamma}_\varepsilon = \coprod_{\varepsilon'\le\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon'}$.

(iii) $\Gamma = \coprod_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \Gamma_\varepsilon$.

(iv) *Pour tout* $\varepsilon \in \mathcal{E}$, Γ_ε *est stable sous l'action de* T.

(v) *Pour tout* $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ *s'identifie à la variété* $\Gamma(\mu_i, i \in \pi_+(\varepsilon))$ *et est donc une sous-variété irréductible lisse de* Γ.

De plus, nous allons avoir besoin du lemme suivant dont la démonstration est immédiate :

LEMME 2.2. — (i) *L'ensemble* Γ^T *des points fixes de* T *dans* Γ *est constitué des* 2^N *points* $[g_1, g_2, \ldots, g_N]$ *où* $g_i \in \{e, g_{\mu_i}\}$. *On identifiera donc* Γ^T *avec* $\mathcal{E}$ *en identifiant* e *avec* 0 *et* g_{μ_i} *avec* 1.

(ii) *Pour tout* $\varepsilon \in \mathcal{E}$, *le point fixe* ε *est l'unique point fixe de* T *dans* Γ_ε.

(iii) *Soit* $(\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{E}^2$, *alors* $\varepsilon \in \overline{\Gamma}_{\varepsilon'}$ *équivaut à* $\varepsilon \le \varepsilon'$. *Pour* $\varepsilon \le \varepsilon'$, *on note* $T^\varepsilon_{\varepsilon'}$ *l'espace tangent à* $\overline{\Gamma}_{\varepsilon'}$ *en* ε. *Les poids de la représentation de* $\mathfrak{h}$ *dans* $T^\varepsilon_{\varepsilon'}$ *induite par l'action de* H *sur* Γ *sont les* $\{-\alpha_i(\varepsilon)\}_{i\in\pi_+(\varepsilon')}$.

Soit $\mu_1, \ldots, \mu_k$ une suite quelconque de k racines simples. On définit une application $g_{\mu_1,\ldots,\mu_k}$ de $\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ dans X par multiplication (c'est-à-dire $g_{\mu_1,\ldots,\mu_k}([g_1, \ldots, g_k]) = g_1 * \cdots * g_k\ [B]$). Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 2.3. — *Soit* $\mu_1, \ldots, \mu_k$ *une suite quelconque de* k *racines simples et soit* $\underline{w} = \underline{s}_{\mu_1} \cdots \underline{s}_{\mu_k}$; *alors l'image de l'application* $g_{\mu_1,\ldots,\mu_k}$ *est égale à* $\overline{X}_w$.

Démonstration. — On pose $X_{\mu_1,\ldots,\mu_k} = g_{\mu_1,\ldots,\mu_k}(\Gamma(\mu_1, \ldots, \mu_k))$. Les variétés Γ étant compactes, $X_{\mu_1,\ldots,\mu_k}$ est fermée.

Pour démontrer ce lemme, on utilisera les relations suivantes, valables pour tout $v \in W$ (voir [15]) :

$$C(s_i)C(v) = \begin{cases} C(s_iv) & \text{si } s_iv > v,\\ C(v) \cup C(s_iv) & \text{si } s_iv < v. \end{cases} \tag{3}$$