

ÉTUDE D'UNE TRANSFORMATION NON UNIFORMÉMENT HYPERBOLIQUE DE L'INTERVALLE $[0, 1[$

PAR ALBERT RAUGI

RÉSUMÉ. — Nous étudions un exemple de transformation non uniformément hyperbolique de l'intervalle $[0, 1[$. Des exemples analogues ont été étudiés par de nombreux auteurs. Notre méthode utilise une théorie spectrale, pour une classe d'opérateurs vérifiant des conditions faibles de Doeblin-Fortet, introduite dans [1]. Elle nous permet, en particulier, de donner une estimation de la vitesse de décroissance des corrélations pour des fonctions non höldériennes.

ABSTRACT (*An example of a Non Uniformly Expanding Transformations of $[0, 1[$*)

We give an example of a non uniformly expanding transformations of $[0, 1[$. Analogous examples have been given by different authors. Our method is based on a general spectral theory for a class of operators satisfying weak “Doeblin-Fortet” conditions (see [1]). This technique makes it possible to estimate the decay of correlations for non Hölder functions.

Introduction

L'étude d'un exemple de transformation présentant une perte d'hyperbolicité en un point fixe a été l'objet de nombreux articles. Les travaux les plus récents (voir [2], [3], [4], [6], [7]) portent sur le problème de vitesse de décroissance des corrélations d'une fonction höldérienne, en vue d'obtenir un théorème de la limite centrale pour ses sommes de Birkhoff.

Texte reçu le 27 mars 2002, révisé le 20 novembre 2002, accepté le 10 décembre 2002.

ALBERT RAUGI, IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France) • *E-mail* : raugi@univ-rennes1.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 37A30, 37C30, 37E05, 47B38, 60F05.

Mots clefs. — Opérateurs de transfert, décroissance des corrélations, théorème de la limite centrale.

Une approche souvent utilisée est celle de l'« induction », proche de la technique probabiliste du « balayage ». On recherche un borélien « récurrent » B de I pour lequel la transformation induite est uniformément dilatante. En découpant alors une somme de Birkhoff suivant les temps de retour dans B , on est « ramené » à une somme de Birkhoff associée à la transformation induite (voir [2], [3], [7]). Une seconde méthode consiste à approcher l'opérateur de « transfert », associé à la transformation, par un opérateur, obtenu par une perturbation aléatoire, ayant de bonnes propriétés spectrales (voir [4]).

Notre approche, basée sur une théorie spectrale pour une classe d'opérateurs vérifiant des conditions faibles de Doeblin-Fortet, permet d'établir directement de bonnes propriétés spectrales pour l'opérateur de transfert. Cette technique permet de travailler avec des fonctions non nécessairement höldériennes. Signalons aussi, que dans le cas höldérien, l'estimation obtenue dans [4] permet d'obtenir le théorème de la limite centrale pour un coefficient de Hölder supérieur à $\alpha/(1-\alpha)$. Ici (cf. corollaire 1.7) ce résultat est obtenu pour un coefficient de Hölder supérieur à $\alpha/(1+\alpha)$.

1. Notations et résultats

1.1. Pour tout réel x , nous désignons respectivement par $[x]$ et $\{x\}$ les parties entière et fractionnaire de x . Pour tout réel x et tout réel strictement positif r , nous notons $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}.$$

Nous considérons l'intervalle $I = [0, 1[$ muni de sa tribu des boréliens $\mathcal{B}(I)$ et de la mesure de Lebesgue normalisée m . Nous choisissons un réel $\alpha \in]0, 1[$ et nous introduisons la transformation τ de I définie par

$$\tau(x) = \{x(1 - x^\alpha)^{-1/\alpha}\}.$$

On notera que 0 est un point fixe « neutre » de τ et qu'en tout point non nul de I , la transformation τ est strictement dilatante.

Nous appelons P l'opérateur dual de l'opérateur de composition par τ :

$$\forall f, g \in \mathbb{L}^2(I, m), \quad \int_0^1 f \circ \tau \, dm = \int_0^1 P f \, g \, dm.$$

La mesure de Lebesgue m est invariante par P et un petit calcul montre que

$$\forall f \in \mathbb{L}^2(m), \quad \forall x \in I, \quad P f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u(s_k(x)) f(s_k(x)),$$

en posant, pour $x \in I$,

$$u(x) = (1 - x^\alpha)^{1+1/\alpha}, \quad t(x) = x (1 + x^\alpha)^{-1/\alpha}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad s_k(x) = t(x + k).$$

Notons aussi que la dérivée de t et la j -ième itérée de t , pour $j \in \mathbb{N}^*$, sont données par

$$t'(x) = (1 + x^\alpha)^{-(1+1/\alpha)}, \quad t^j(x) = x(1 + jx^\alpha)^{-1/\alpha}.$$

1.2. Dans le cas d'une transformation uniformément dilatante, l'étude classique du comportement asymptotique des itérés P^n , $n \geq 1$, de l'opérateur de transfert P , est basée sur la technique suivante. Les inverses s_n , $n \in \mathbb{N}$, de τ sont uniformément contractants; autrement dit, il existe un réel $\rho \in [0, 1[$ tel que

$$\forall(n, k) \in \mathbb{N}^2, \forall x \in I, \quad s_n(B(x, \rho^k)) \subset B(s_n(x), \rho^{k+1}).$$

Si f est une fonction continue sur I , on introduit alors les quantités

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \tilde{v}(f, k) = \sup\{|f(x) - f(y)| : (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \rho^k\}$$

qui mesurent les variations de f sur les boules de rayon ρ^k . À l'aide de ces variations, on construit dans $\mathbb{L}^1(m)$ une nouvelle norme pour laquelle P est un opérateur de Doeblin-Fortet au sens fort.

Dans notre cas, nous commençons par chercher une suite $(\eta_k)_{k \geq 0}$ de fonctions sur $]0, 1[$ telle que

$$\forall(n, k) \in \mathbb{N}^2, \forall x \in I, \quad s_n(B(x, \eta_k(x))) \subset B(s_n(x), \eta_{k+1}(s_n(x))).$$

Nous verrons (lemme 2.1) que la suite définie par

$$\eta_k(x) = (2 + j \vee k)^{-1-1/\alpha}, \quad \text{si } x \in [t^j(1), t^{j-1}(1)[, \quad j \geq 1,$$

répond à la question.

Pour toute fonction borélienne f sur I , pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons :

$$\mathcal{V}(f, x, n) = \|f(x) - f(\cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty(B(x, \eta_n(x)), m)}, \quad v(f, n) = \int_0^1 \mathcal{V}(f, t, n) dt.$$

On notera que cette mesure des variations de f est bien plus générale que la précédente; en particulier, on peut avoir $\lim_n v(f, n) = 0$ pour une fonction f non continue. Pour tout réel $\beta \in [0, 1 - \alpha[$, nous notons m_β la mesure de densité $x^{-\beta}$ par rapport à la mesure de Lebesgue m . À l'aide de ces variations, nous construisons dans $\mathbb{L}^1(m_\beta)$ une suite de semi-normes pour laquelle P est un opérateur de Doeblin-Fortet au sens faible (cf. [1]). La construction de cette suite sera donnée dans la section 2.

1.3. Nous appelons $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications L de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ de la forme

$$L(x) = x \exp \left(\int_x^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right)$$

pour une fonction continue positive ε sur $]0, +\infty[$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} dt = +\infty.$$

En particulier, pour tout entier naturel non nul p , appelons $\ln^{\circ p}$ la p -ième itérée du logarithme népérien. Pour tout réel $a > 0$ suffisamment grand, l'application

$$f(x) = x \left(\ln^{\circ p} \left(a + \frac{1}{x} \right) - \ln^{\circ p}(a+1) \right) \underset{0}{\sim} x \ln^{\circ p}(1/x)$$

appartient à $\mathcal{S}$.

Nous posons

$$V_\beta = \{f \in \mathbb{L}^1(I, m_\beta) : \lim_{n \rightarrow +\infty} v(f, n) = 0\}.$$

Pour tout $f \in V_\beta$, nous introduisons la suite $u_\beta(f, \cdot)$ de terme général

$$u_\beta(f, n) = v(f, n) + \int_0^{t^n(1)} |f| dm_\beta.$$

Enfin, nous appelons γ le réel $\min\{(1-\beta)/\alpha, 2 + (\beta/\alpha)\}$.

THÉOREME 1.4. — *Pour tout $a \in]0, 1[$, la suite de fonctions $(P^n 1)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[a, 1[$ vers une fonction h , continue, strictement positive et invariante par P . De plus, il existe $c > 0$ tel que $h(x) \underset{0}{\sim} c/x^\alpha$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $v(h, n) = o(n^{\varepsilon-1/\alpha})$.*

Pour tout $\beta \in [0, 1-\alpha[$ et toute fonction g de V_β , la suite $(P^n g)_{n \geq 0}$ converge dans $L^1(I, m_\beta)$ vers $m(g)h$. Lorsque $m(g) = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \|P^n g\|_{\mathbb{L}^1(m_\beta)} &= o\left(L(n^{-\gamma}) \sum_{k=0}^n \left[L(u_\beta(g, k)) + L\left(k^{(\beta-1)/\alpha} \sum_{j=1}^k v(g, j)\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + L(u_\beta(g, [\tfrac{1}{2}n])) + L(n^{(\beta-1)/\alpha} \sum_{j=1}^n v(g, j)) \right) \end{aligned}$$

pour tout $L \in \mathcal{S}$.

(ii) Si $\sum_{k \geq 0} u_\beta(g, k) < +\infty$, alors pour tout $L \in \mathcal{S}$,

$$\|P^n g\|_{\mathbb{L}^1(m_\beta)} = o\left(L(n^{-\gamma}) + L(u_\beta(g, [\tfrac{1}{2}n]))\right).$$

(iii) Si pour un réel $r < \gamma - 1$, la série $\sum_{k \geq 0} k^r u_\beta(g, k)$ converge, alors la série $\sum_{k \geq 0} k^r \|P^n g\|_{\mathbb{L}^1(m_\beta)}$ converge aussi.

1.5. Nous considérons l'opérateur relativisé $\tilde{P}$ défini par

$$\tilde{P}f = h^{-1}P(hf).$$

Pour tous réels $\beta \in [0, 1 - \alpha[$ et $p \in [1, +\infty[$, nous posons :

$$\tilde{V}_{\beta,p} = \{f \in \mathbb{L}^p(I, hm_\beta) : \lim_{n \rightarrow +\infty} v(hf, n) = 0\}.$$

Pour tout $f \in \tilde{V}_{\beta,p}$, nous introduisons la suite $\tilde{u}_{\beta,p}(f, \cdot)$ de terme général

$$\tilde{u}_{\beta,p}(f, n) = v(hf, n) + \left(\int_0^{t^n(1)} |f|^p h dm_\beta \right)^{1/p}.$$

THÉORÈME 1.6. — Soient $\beta \in [0, 1 - \alpha[$ et $p \in [1, +\infty[$ tels que

$$\gamma_p = \min \left\{ 2 + \frac{\beta}{\alpha}, \frac{1 - \beta}{p\alpha} \right\} > 1.$$

Alors, pour toute fonction g de $\tilde{V}_{\beta,p}$, la suite $(\tilde{P}^n g)_{n \geq 0}$ converge dans $L^p(I, hm_\beta)$ vers $m(gh)$. Lorsque $m(gh) = 0$, nous avons :

(i) pour tout $L \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}^n g\|_{\mathbb{L}^p(hm_\beta)} &= o\left(L(n^{-\gamma_p}) \sum_{k=0}^n \left[L(\tilde{u}_{\beta,p}(g, k)) + L\left(k^{(\beta-1)/p\alpha} \sum_{j=1}^k v(gh, j)\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + L(\tilde{u}_{\beta,p}(g, [\tfrac{1}{2}n])) + L\left(n^{(\beta-1)/p\alpha} \sum_{j=1}^n v(gh, j)\right) \right); \end{aligned}$$

(ii) $\sum_{k \geq 0} \tilde{u}_{\beta,p}(g, k) < \infty$, alors pour tout $L \in \mathcal{S}$,

$$\|\tilde{P}^n g\|_{\mathbb{L}^p(hm_\beta)} = o\left(L(n^{-\gamma_p}) + L(\tilde{u}_{\beta,p}(g, [\tfrac{1}{2}n]))\right);$$

(iii) si pour un réel $r < \gamma_p - 1$, la série $\sum_{k \geq 0} k^r \tilde{u}_{\beta,p}(g, k)$ converge, alors la série $\sum_{k \geq 0} k^r \|\tilde{P}^n g\|_{\mathbb{L}^p(hm_\beta)}$ converge aussi.

COROLLAIRE 1.7. — Supposons que $\alpha < 1/2$. Pour toute fonction borélienne g telle que $m(gh) = 0$, nous avons :

(i) Si

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(v(gh, k) + \left(\int_0^{t^k(1)} |g|^2(x) x^{-\alpha} dx \right)^{1/2} \right) < +\infty,$$

alors la suite de fonctions $(n^{-1/2} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ \tau^j)_{n \geq 1}$ converge en loi sous hm vers une loi normale centrée (cf. [5]). En particulier, c'est le cas pour la fonction $g(x) = (a - x)/(x^{\alpha+\eta})$ avec $4\alpha + 2\eta < 1$ et a tel que $m(hg) = 0$.