

INÉGALITÉS DE RÉSOVANTE POUR L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER AVEC POTENTIEL MULTIPOLAIRE CRITIQUE

PAR THOMAS DUYCKAERTS

RÉSUMÉ. — On étudie un opérateur de la forme $-\Delta + V$ sur $\mathbb{R}^d$, où V est un potentiel admettant plusieurs pôles en a/r^2 . Plus précisément, on démontre l'estimation de résolvante tronquée à hautes fréquences, classique dans les cas non-captifs, et qui implique l'effet régularisant standard pour l'équation de Schrödinger correspondante. La preuve est basée sur l'introduction d'une mesure de défaut micro-locale semi-classique. On démontre également, dans le même contexte, des inégalités de Strichartz pour l'équation de Schrödinger.

ABSTRACT (*Resolvent estimates for Schrödinger operator with critical multipolar potential*)

We consider an operator of the form: $-\Delta + V$ on $\mathbb{R}^d$, where V is a potential with a finite number of inverse-square singularities. More precisely, we show the usual high frequency estimate on the truncated resolvent, which is classical in nontrapping geometries, and implies the smoothing effect on the corresponding Schrödinger equation. The proof relies on the use of a semiclassical microlocal defect measure. We also show, in the same framework, Strichartz estimates for solutions of the Schrödinger equations.

Texte reçu le 2 juillet 2004, révisé le 25 octobre 2005.

THOMAS DUYCKAERTS, Université de Cergy-Pontoise, Département de Mathématiques, Site de Saint Martin, 2 avenue Adolphe-Chauvin, 95302 Cergy-Pontoise Cedex (France).

E-mail : thomas.duyckaerts@u-cergy.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 35A27, 35B65, 35Q40, 81Q20, 47A10, 35B25, 35L05.

Mots clefs. — Équation de Schrödinger, potentiel singulier, inégalité de résolvante, analyse micro-locale, mesure de défaut.

Table des matières

1. Introduction	202
2. Définitions et hypothèses	206
3. Preuve des inégalités de résolvante	210
4. Un cas plus général	232
5. Inégalités de Strichartz	234
Bibliographie	237

1. Introduction

Nous considérons dans ce travail un opérateur de la forme

$$P = -\Delta + V,$$

sur l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$), où

$$\Delta = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

est le laplacien standard et le potentiel V est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^d$. L'étude de la résolvante

$$R_z = (P - z)^{-1}, \quad z \notin \mathbb{R},$$

près de l'axe réel, intéressante en elle même, permet aussi de préciser le comportement des solutions des équations d'onde et de Schrödinger associées à P . Lorsque V est régulier, de nombreuses inégalités ont été démontrées sur des normes de R_z dans des espaces à poids, notamment l'inégalité standard à haute fréquence, sur la résolvante tronquée

$$(1) \quad \|\chi R_z \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{1 + |z|}}$$

où z est grand en module près de l'axe réel, et χ est une fonction régulière à support compact. De tels résultats remontent aux travaux de C.S. Morawetz [18] et [19], qui en déduisaient la décroissance uniforme de l'énergie locale de l'équation des ondes correspondante. On peut démontrer (1) dans un cadre général, en modifiant la métrique définissant le laplacien ou en rajoutant un obstacle, moyennant une hypothèse essentielle de non-capture sur les géodésiques de cette métrique (cf. [16], [3], [29]).

Dans [25] et [26], A. Ruiz et L. Vega considèrent des potentiels peu réguliers, et démontrent des estimations sur la résolvante de P , et les effets régularisants locaux des équations d'onde et de Schrödinger. Le principe de ces deux articles est d'écrire des estimations sur le laplacien libre Δ , puis de considérer V comme une petite perturbation de ce dernier. Un tel raisonnement fonctionne par exemple si $V \in L^q$, $q \geq \frac{1}{2}d$ est assez petit à l'infini.

Ici, nous supposons que le potentiel V (également petit à l'infini) est borné en dehors d'un ensemble fini de pôles distincts

$$\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^d$$

près desquels

$$(2) \quad V(x) \approx \frac{a_j}{|x - p_j|^2}.$$

De telles singularités sont critiques, car du même ordre que le laplacien. Les singularités moins fortes rentrent dans le cadre de l'article précité et pour les singularités d'ordre supérieur on ne peut pas, en général, démontrer (1). De fait, il existe des potentiels positifs, à support compact, admettant une singularité en 0 de l'ordre de $|x|^{-2} \log^2 |x|$, et tels que la résolvante de P ne vérifie pas d'inégalité haute fréquence telle que (1), même en s'autorisant des pertes polynomiales en $|z|$. Pour de tels potentiels, les propriétés classiques de régularisation et de dispersion des solutions de l'équation de Schrödinger sont fausses (cf. [10]).

Deux cas particuliers de potentiels admettant des singularités en inverse quadratique ont déjà été étudiés. En dimension supérieure à 3, lorsque les constantes a_j sont petites dans (2), le potentiel V reste en un certain sens inférieur au laplacien et on reste dans le cadre de [26]. En omettant cette hypothèse de petitesse, on change la nature du problème car on ne peut plus considérer V comme une perturbation du laplacien.

Le cas unipolaire, essentiellement

$$P_a = -\Delta + \frac{a}{|x|^2}, \quad a + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 > 0,$$

est lui traité dans [22] et [5]. Moyennant l'hypothèse sur a , qui assure la positivité de l'opérateur P_a , les auteurs démontrent des inégalités de Strichartz sur les équations d'évolutions associées à P_a . Leur raisonnement, reposant sur la forme particulière de P_a et des calculs explicites, ne s'adapte pas au cas multipolaire.

On démontre ici (1) pour un potentiel multipolaire. Ce type de potentiels apparaît dans certains modèles de chimie physique [2], mais la motivation principale de ce travail est l'étude d'un problème critique, cas limite où les singularités de V sont exactement du degré d'homogénéité du laplacien. On suppose que près de chaque pôle p_j , V est radial (c'est à dire fonction de la seule variable $|x - p_j|$). Cette condition est légèrement assouplie dans la section 4 (cf. théorème 4). On fait également, près de p_j , les hypothèses

$$\frac{a}{|x - p_j|^2} \leq V(x) \leq \frac{C}{|x - p_j|^2}, \quad |\nabla V(x)| \leq \frac{C}{|x - p_j|^3},$$

pour une grande constante C et un réel a tel que $a + (\frac{1}{2}d - 1)^2 > 0$.

Ces hypothèses sont vérifiées par exemple lorsque V est exactement, près de chaque p_j , de la forme

$$\frac{a_j}{|x - p_j|^2}, \quad a_j + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 > 0.$$

On suppose aussi pour simplifier V nul à l'infini et borné en dehors des pôles. Dans ces conditions on peut toujours définir, au sens des formes quadratiques, un opérateur auto-adjoint semi-borné inférieurement $P = -\Delta + V$. Les hypothèses sur V et la construction précise de P sont explicitées et discutées dans la section 2.

THÉOREME 1. — *Soient V vérifiant les hypothèses (7)–(12) de la section 2 et $P = -\Delta + V$. On se donne $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors :*

$$(3) \quad \exists \lambda_0 > 0, \exists C > 0, \forall \lambda > \lambda_0, \forall \varepsilon > 0, \quad \|\chi R_{\lambda \pm i\varepsilon} \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{1 + \sqrt{\lambda}}.$$

Dans le cas d'un seul pôle ($N = 1$), l'estimation (3) reste vraie sans la borne sur la dérivée de V (hypothèse (11) de la section 2).

Comme déjà indiqué, l'estimation (3) est l'estimation standard sur la résolvante d'un laplacien induisant une métrique non captive. Dans les cas captifs, cette estimation est fausse. Le théorème 1 montre en particulier que l'énergie ne se concentre pas à haute fréquence sur les pôles, et que ces derniers ne se comportent pas non plus comme des obstacles qui renverraient les rayons optiques.

La démonstration du théorème 1 suit celle de N. Burq [3], qui prouve la même inégalité pour un laplacien sur l'espace $\mathbb{R}^d$ éventuellement privé d'un obstacle, associé à une métrique non-captive. Elle repose sur l'introduction dans un raisonnement par l'absurde d'une mesure de défaut semi-classique, objet introduit indépendamment par P. Gérard et P.L. Lions [13] et [17]. La difficulté nouvelle repose dans la compréhension du comportement de la mesure près de chacun des pôles. On peut signaler une approche différente mais relatée à la nôtre pour démontrer des résultats similaires, celle du calcul de commutateurs positifs introduit par E. Mourre [20], et qui fonctionne telle quelle sur l'opérateur unipolaire P_a . L'auteur tient à remercier C. Gérard et F. Nier pour l'avoir éclairé sur ce sujet. On renvoie à [12] pour un ouvrage général dans cette direction. L'article [29] de A. Vasy et M. Zworsky donne une version micro-locale de ce type de techniques.

On énonce à présent des applications du théorème 1 à l'équation de Schrödinger associée à P :

$$(4) \quad i\partial_t u + Pu = 0, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

L'effet régularisant avec gain d'une demi-dérivée est une conséquence standard de l'inégalité (3) (cf. Burq, Gérard et Tzvetkov [4, prop. 2.7, rem. 2.9]) :

COROLLAIRE 2. — *Soit V vérifiant les hypothèses du théorème 1. Alors*

$$(5) \quad \forall \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \forall T > 0, \exists C > 0, \forall u_0 \in L^2, \\ \| \chi u(t) \|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d))} \leq C \| u_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

où l'on a noté $u(t)$ la solution de l'équation de Schrödinger (4).

Cet effet régularisant a été remarqué pour la première fois, lorsque V est régulier, par Constantin et Saut [8], Sjölin [27] et Vega [31]. Nous avons énoncé une propriété locale en temps. L'inégalité (3) mais pour tout réel λ impliquerait un effet régularisant global en temps, c'est-à-dire (5) en remplaçant $L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d))$ par $L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d))$. Dans notre cas l'absence, en dehors des pôles, d'hypothèse de borne inférieure sur V , et donc l'existence possible d'un nombre fini de valeurs propres pour P empêchent en général une telle propriété.

Une autre question naturelle, essentielle dans l'étude des équations non-linéaires, est celle des estimations de Strichartz pour les solutions de (4). Une façon de répondre (partiellement) à cette question est de remarquer que l'inégalité (5) permet, en absorbant les termes d'erreur dus aux troncatures, de localiser ces estimations (cf. Staffilani et Tataru [28]). Dans notre cas, on obtient, à partir des inégalités de Strichartz pour des potentiels unipolaires (démontrées par N. Burq, F. Planchon, J. Stalker et A. Shadi Tahvildar-Zadeh [5]), les mêmes estimations pour nos potentiels multipolaires. Pour valider un tel raisonnement, les singularités de V doivent alors vérifier les hypothèses du théorème 1, mais également celles faites dans [5]. On donne ici, pour ne pas alourdir la présentation, une forme très particulière au potentiel mais le théorème 4 et les résultats récents de [6] permettraient une légère généralisation. On note encore $u(t)$ la solution de l'équation de Schrödinger (4) de condition initiale u_0 .

COROLLAIRE 3. — *Soit $V \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$, à support compact. On suppose que pour tout j , il existe un réel a_j vérifiant $a_j + (\frac{1}{2}d - 1)^2 > 0$ et tel que*

$$V(x) = \frac{a_j}{|x - p_j|^2}$$

près de chaque pôle p_j . Soient $r, s \in [2, +\infty]$ tels que

$$\frac{2}{r} + \frac{d}{s} = \frac{d}{2}, \quad r > 2.$$

Alors :

$$(6) \quad \forall T \in]0, +\infty[, \exists C > 0, \forall u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ \| u(t) \|_{L^r(0,T;L^s(\mathbb{R}^d))} \leq C \| u_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Il est standard que les inégalités (6) impliquent des résultats d'existence et d'unicité sur les équations non-linéaires correspondant à (4) (cf. [14]).