

SUR LE GROUPE DES CLASSES D'UN SCHÉMA ARITHMÉTIQUE

PAR BRUNO KAHN

Avec un appendice de Marc Hindry

RÉSUMÉ. — Nous donnons une démonstration du fait que le groupe des classes d'un schéma irréductible de type fini sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$ est de type fini. Cette preuve ne repose pas sur le théorème de Mordell-Weil-Néron, mais plutôt sur le théorème de Mordell-Weil classique, le théorème de Néron-Severi et les théorèmes de Hironaka et de Jong sur la résolution des singularités. Nous en déduisons quelques corollaires, parmi lesquels le théorème de Mordell-Weil-Néron lui-même.

ABSTRACT (*On the class group of an arithmetic scheme*). — We present a proof that the class group of an irreducible scheme of finite type over $\text{Spec } \mathbf{Z}$ is finitely generated. This proof does not rely on the Mordell-Weil-Néron theorem but rather on the classical Mordell-Weil theorem, the Néron-Severi theorem and Hironaka and de Jong's theorems on resolution of singularities. We derive some corollaries, including the Mordell-Weil-Néron theorem itself.

Texte reçu le 15 février 2005, révisé le 20 juillet 2005, accepté le 4 octobre 2005.

BRUNO KAHN, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris (France). • *E-mail* : kahn@math.jussieu.fr

MARC HINDRY, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris (France). • *E-mail* : hindry@math.jussieu.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G99, 14F22, 14E15, 14G99, 14K99.

Mots clefs. — Géométrie arithmétique, résolution des singularités, variétés abéliennes, groupe des classes, groupe de Brauer.

Introduction

Soit X un schéma noethérien. Rappelons (voir [13, §21], [15, ch. II, §6, p. 131 et 143]) la définition du *groupe des classes* $\mathrm{Cl}(X)$ et du *groupe de Picard* $\mathrm{Pic}(X)$:

- $\mathrm{Cl}(X)$ est le quotient du groupe des cycles de codimension 1 de X par le sous-groupe des cycles principaux.
- $\mathrm{Pic}(X)$ est le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droite (ou de $\mathcal{O}_X$ -modules inversibles) sur X .

On a aussi le groupe quotient $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^p(X)$ des diviseurs de Cartier par les diviseurs de Cartier principaux. La relation entre ces trois groupes est donnée par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^p(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) \\ \downarrow & & \\ \mathrm{Cl}(X) & & \end{array}$$

où :

- l'homomorphisme horizontal est injectif, et bijectif si par exemple X est réduit [13, 21.3.4] ou quasi-projectif sur une base affine (*ibid.*, 21.3.5) ;
- l'homomorphisme vertical est injectif si X est normal et bijectif si et seulement si X est localement factoriel, par exemple régulier (*cf.* [13, 21.6.10], [15, p. 142, rem. 6.11.2 et cor. 6.16]).

Si U est un ouvert schématiquement dense de X , on a la suite exacte bien connue :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow \Gamma(U, \mathbb{G}_m) \rightarrow \bigoplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Cl}(X) \rightarrow \mathrm{Cl}(U) \rightarrow 0$$

où la somme (finie) porte sur les points de codimension 1 de X qui ne sont pas dans U .

Finalement, si X est de dimension d on a aussi le groupe $\mathrm{CH}_{d-1}(X)$ des cycles de dimension $d-1$ sur X modulo l'équivalence rationnelle [9, ch. 2], qui coïncide avec $\mathrm{Cl}(X)$ si X est irréductible.

Le but de ce travail est de présenter une démonstration des énoncés suivants :

THÉOREME 1. — *Supposons X de type fini sur $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$.*

- a) *Si X est réduit, le groupe $\Gamma(X, \mathbb{G}_m)$ est de type fini.*
- b) *Si X est irréductible, le groupe $\mathrm{Cl}(X)$ est de type fini.*

COROLLAIRE 1. — *Si X est normal et de type fini sur $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$, $\mathrm{Pic}(X)$ est de type fini.* □

COROLLAIRE 2 (*cf.* Guralnick et al. [14, prop. 6.1]). — *Le groupe $\mathrm{Cl}(X)$ (resp. $\mathrm{Pic}(X)$) est de type fini si X est irréductible (resp. normal) et de type fini sur $\mathrm{Spec} k$, où k est un corps de type fini sur son sous-corps premier.*

En effet, on peut choisir un modèle U de k , irréductible et de type fini sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$, et (quitte à rétrécir U) épaissir X en $\mathcal{X}$ irréductible (resp. normal) et de type fini sur U . Alors $\mathcal{X}$ est de type fini sur $\text{Spec } \mathbf{Z}$ et $\text{Cl}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Cl}(X)$ est surjectif. $\square$

COROLLAIRE 3 (Néron [29]). — *Soit k un corps de type fini sur son sous-corps premier, et soit A une variété abélienne sur k . Alors le groupe $A(k)$ est de type fini.*

Démonstration. — On applique le corollaire 2 à la variété abélienne duale $A^\vee$ de A , en notant que $\text{Pic}^0(A^\vee) = A(k)$. $\square$

Ainsi, pour obtenir le corollaire 3, il n'est pas nécessaire d'utiliser la théorie de la K/k -trace, ni de faire une deuxième fois (géométrique) la démonstration (arithmétique) du théorème de Mordell-Weil. Malheureusement je ne sais pas déduire du théorème 1 le théorème général de Lang-Néron [20] :

THÉORÈME 2. — *Si K/k est une extension régulière de type fini et si A est une K -variété abélienne, alors le groupe $A(K)/A_0(k)$ est de type fini, où A_0 est la K/k -trace de A .*

On trouvera dans l'appendice A des rappels sur la K/k -trace et dans l'appendice B une démonstration de ce théorème (et même d'un énoncé un peu plus général), rédigée par Marc Hindry dans le langage des schémas.

Voici également deux énoncés liés aux précédents : le premier étend le théorème de Néron-Severi rappelé ci-dessous (théorème 5).

THÉORÈME 3. — *Soient k un corps algébriquement clos et X une k -variété de dimension $\leq d$. Alors le groupe $A_{d-1}(X)$ des cycles de dimension $d-1$ sur X modulo l'équivalence algébrique est de type fini.*

THÉORÈME 4. — *Soient k un corps, K un corps de type fini sur k et L/K une extension de type fini, avec K algébriquement fermé dans L . Soit p l'exposant caractéristique de k . Faisons l'une des hypothèses suivantes :*

- (i) k est un corps de nombres.
- (ii) $H^1(k, A)$ est fini pour tout module galoisien A fini d'ordre premier à p .
Exemples : k algébriquement clos, fini, local, corps de séries formelles itérées sur un tel corps, ...

Alors la partie première à p de $\text{Ker}(\text{Br}(K) \rightarrow \text{Br}(L))$ est finie, où Br désigne le groupe de Brauer.

REMARQUES 1

1) Dans le cas affine, le théorème 1, a) est dû à Samuel [32, th. 1] (et la démonstration que nous donnons est essentiellement la sienne).

2) Lorsque X est normal, le théorème 1, b) est en principe dû à Roquette [30] (voir la note en bas de page). Roquette procède par récurrence sur la dimension

de X et utilise la thèse de Néron généralisant le théorème de Mordell-Weil (corollaire 3 ci-dessus), ainsi que la génération finie du groupe de Néron-Severi (théorème 5 ci-dessous)⁽¹⁾.

3) Le théorème 1, a) est faux si on ne suppose pas X réduit. Exemple bien connu : $X = \text{Spec } A$, avec $A = A_0[\epsilon]/\epsilon^2$ où $A_0 = \mathbf{Z}[t]$ ou $\mathbf{F}_p[t]$.

4) Le théorème 1, b) est faux si on ne suppose pas X irréductible. En effet, si $X = Z_1 \cup Z_2$, où Z_1 et Z_2 sont deux sous-schémas fermés dont les supports sont différents du support de X , on a une suite exacte “de Mayer-Vietoris”⁽²⁾

$$(2) \quad 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \Gamma(Z_1, \mathbb{G}_m) \oplus \Gamma(Z_2, \mathbb{G}_m) \\ \longrightarrow \Gamma(Z_1 \cap Z_2, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\partial} \text{Cl}(X).$$

Choisissons $X = \text{Spec } B$, avec $B = A_0[x, y]/x(y^2 - x)$ où A_0 est comme en a), et Z_1, Z_2 donnés respectivement par les équations $x = 0$ et $y^2 = x$, de sorte que $Z_1 \cap Z_2 = \text{Spec } A$ où A est comme dans la remarque précédente. Alors $\Gamma(Z_1, \mathbb{G}_m)$ et $\Gamma(Z_2, \mathbb{G}_m)$ sont finis. D’autre part, $\Gamma(Z_1 \cap Z_2, \mathbb{G}_m)$ n’est pas de type fini comme vu dans la remarque précédente, et donc $\text{Cl}(X)$ non plus.

Par contre, on déduit facilement du théorème 1, b) que $\text{CH}_{d-1}(X)$ est de type fini pour X quelconque, grâce aux suites exactes du type

$$\text{CH}_{d-1}(Z_1) \oplus \text{CH}_{d-1}(Z_2) \longrightarrow \text{CH}_{d-1}(X) \rightarrow 0$$

si X est réunion de deux fermés Z_1 et Z_2 .

5) Le rapporteur m’a fait remarquer que le théorème 1 se généralise au cas d’un X -tore T en se ramenant à ce théorème : pour la génération finie de $H^1(X, T)$ il faut supposer X normal. Dans ce cas, on utilise le fait que T est déployé par un morphisme fini étale (surjectif) d’après [7, ch. X, cor. 5.14]. Le rapporteur observe par contre que la version torique du corollaire 2 est fautive en général, déjà avec $X = \text{Spec } \mathbf{Q}$ et $T = R_{\mathbf{Q}(\sqrt{-1})/\mathbf{Q}}^1 \mathbb{G}_m$. (Elle est vraie pour les tores flasques au moins sur les corps de type fini d’après Colliot-Thélène & Sansuc, [5, p. 192, th. 1] ; leur démonstration repose d’ailleurs sur le théorème 1 !)

⁽¹⁾La démonstration de Roquette offre toutefois une difficulté en caractéristique p : si L/K est une extension de type fini de degré de transcendance 1, où K et L sont de type fini sur $\mathbf{F}_p$ et K est algébriquement fermé dans L , il n’est pas vrai en général que la K -courbe projective régulière de corps des fonctions L soit lisse sur K . Sa variété de Picard n’est donc pas en général une variété abélienne et le théorème de Néron ne peut pas être invoqué tel quel, cf. exemple 1. L’approche du présent article contourne cet écueil. Il serait intéressant de trouver une démonstration du théorème de Roquette qui en caractéristique p évite le recours au théorème de de Jong.

⁽²⁾Sans établir cette suite exacte, décrivons l’homomorphisme ∂ . Soit u une unité sur $Z_1 \cap Z_2$. Relevons u en deux “fonctions méromorphes” f_1 et f_2 sur Z_1 et Z_2 . Les cycles associés à f_1 et f_2 se recollent en un cycle sur X , d’où $\partial(u) \in \text{Cl}(X)$.

6) Le corollaire 1 est faux si on retire l'hypothèse "normal". Par exemple, si X est la courbe projective intègre donnée par l'équation $y^2z = x^3$ sur un anneau de base A_0 comme en a), alors $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Cl}(X) = \mathbf{Z}$ est surjectif de noyau A_0 , cf. [9, ex. 2.1.2].

7) Dans le corollaire 2, $\Gamma(X, \mathbb{G}_m)$ n'est bien sûr pas de type fini (à moins que k ne soit fini), mais le groupe $\Gamma(X, \mathbb{G}_m)/k^*$ l'est si X est géométriquement intègre, par la méthode du §2.1 ci-dessous.

8) Dans le théorème 4, l'hypothèse "algébriquement fermé" est nécessaire : l'énoncé est faux en général pour une extension finie, par exemple pour $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})/\mathbf{Q} \dots$. En fait, pour une extension finie non triviale L/K de corps globaux, $\text{Ker}(\text{Br}(K) \rightarrow \text{Br}(L))$ est *toujours infini* par un théorème de Fein, Kantor et Schacher [8]. Il y a de nombreux autres exemples.

9) Le théorème 4, (ii) est nettement plus élémentaire que le théorème 1 : il ne fait intervenir que le théorème de Mordell-Weil faible.

10) Dans le théorème 4, (ii) j'ignore ce qu'il advient de la p -torsion quand (par exemple) k est algébriquement clos de caractéristique p . D'autre part, supprimant toute hypothèse sur k , je ne suis pas parvenu à trouver d'exemple d'extension de type fini L/K (disons, en caractéristique zéro) avec K algébriquement fermé dans L et telle que $\text{Ker}(\text{Br}(K) \rightarrow \text{Br}(L))$ soit infini.

EXEMPLE 1. — Sur $k = \mathbf{F}_p(t)$, soit X la courbe projective d'équation $x^2z^{p-2} = y^p - tz^p$. Alors X est régulière sans être lisse sur k . D'après le corollaire 2, $\text{Pic}(X)$ est de type fini bien que la variété de Picard de X contienne un sous-groupe unipotent non trivial.

Les ingrédients de la démonstration du théorème 1 sont les suivants :

1) Le fait, rappelé ci-dessous, que le groupe de Néron-Severi d'une variété projective lisse sur un corps algébriquement clos est de type fini.

2) L'existence de la variété de Picard d'une variété projective lisse X sur un corps k , définie sur k , "représentant" le groupe $\text{Cl}^0(X) = \text{Pic}^0(X)$ des classes de diviseurs algébriquement équivalents à 0.

3) Le théorème de Mordell-Weil : le groupe des points rationnels d'une variété abélienne sur un corps de nombres est de type fini.

4) Les théorèmes classiques de finitude en théorie algébrique des nombres : finitude du groupe des classes et théorème des unités de Dirichlet.

5) Des résultats de désingularisation : théorème de de Jong [17, th. 4.1] en caractéristique p et résolution des singularités de Hironaka [16] en caractéristique 0. (En caractéristique 0 on pourrait se contenter du théorème de de Jong, plus élémentaire.)

Le résultat 2) est dû à de nombreux auteurs : Matsusaka [22], Chow [4], Weil (reproduit dans Lang [18, ch. VI]) et a bien sûr été complètement réécrit par Grothendieck et ses successeurs [11] (voir aussi [2, ch. 8 et 9]) : nous n'aurons