Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CATÉGORIE HOMOTOPIQUE STABLE D'UN SITE SUSPENDU AVEC INTERVALLE

Joël Riou

Tome 135
Fascicule 4

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-

Bull. Soc. math. France
135 (4), 2007, p. 495–

CATÉGORIE HOMOTOPIQUE STABLE D'UN SITE SUSPENDU AVEC INTERVALLE

PAR JOËL RIOU

RÉSUMÉ. — Cet article présente la construction de la catégorie homotopique stable d'un site suspendu avec intervalle arbitraire. La fonctorialité de cette construction est étudiée, avec des applications à la théorie homotopique des schémas introduite par F. Morel et V. Voevodsky.

ABSTRACT (*The stable homotopy category of an hanging site with interval*)
This article describes the construction of the stable homotopy category of an arbitrary hanging site with interval. The functoriality of this construction is studied and has applications to the $\mathbf{A}^1$-homotopy theory introduced by F. Morel and V. Voevodsky.

Dans leur article [24], Fabien Morel et Vladimir Voevodsky ont construit la catégorie homotopique $\mathscr{H}(S)$ d'un schéma noethérien S. Ce travail s'appuyait sur la construction d'une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des faisceaux simpliciaux sur un site (cf. [19], voir aussi [18] et [6] pour des travaux précurseurs).

Certains des énoncés fondamentaux de la théorie homotopique des schémas s'énoncent le plus élégamment dans la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}(S)$

Texte recu le 29 janvier 2007, accepté le 5 septembre 2007

JOËL RIOU, Université Paris-Sud 11, Département de mathématiques, bât. 425, 91405 Orsay
Url : `http://www.math.u-psud.fr/~riou/`
• *E-mail :* `joel.riou@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F20, 14F42, 18F10, 18G30, 18G55, 55P42.

Mots clefs. — Théorie homotopique des schémas, faisceaux simpliciaux, spectres, catégorie triangulée.

associée au schéma S (voir [30, propositions 4.11, 4.12 et 4.13]) plutôt que dans la catégorie homotopique instable $\mathscr{H}(S)$. Cette catégorie homotopique stable a été étudiée par Rick Jardine dans [20] ; en particulier, une structure monoïdale symétrique y a été construite grâce à l'utilisation des spectres symétriques. Un autre point de vue est développé dans [17].

Cependant, la construction de [20] utilise des propriétés très particulières de la topologie de Nisnevich : un analogue du théorème de Brown-Gersten de [7] pour la topologie de Nisnevich (cf. [24, proposition 1.16, page 100]) et les énoncés de compacité homotopique qu'on peut en déduire (cf. [20, § 2.2]). Ces propriétés de compacité homotopique ne sont pas satisfaites sur les sites arbitraires ; on ne peut donc pas appliquer exactement la même méthode pour définir par exemple les variantes étales des catégories $\mathcal{SH}(S)$.

Dans cet article, on se propose de donner une construction de la catégorie homotopique stable d'un « site suspendu avec intervalle » $(\mathscr{S}, I, T)$ avec essentiellement le même degré de généralité que dans [24]. Un site suspendu avec intervalle consiste en la donnée d'un site $\mathscr{S}$, d'un préfaisceau simplicial I sur ce site et d'un préfaisceau simplicial pointé T. Comme dans [24], on procède à une localisation à la Bousfield pour définir la notion de I-équivalence faible entre préfaisceaux simpliciaux sur $\mathscr{S}$. Disposant d'une notion de I-équivalence projective (terme à terme) au niveau des T-spectres dans la catégorie des préfaisceaux simpliciaux pointés sur $\mathscr{S}$, on procèdera à une nouvelle localisation à la Bousfield par rapport aux Ω-spectres pour obtenir la notion de I-équivalence stable, ce qui donnera naissance à la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$. L'existence des localisations à la Bousfield sera assurée par les résultats généraux de [15] sur les catégories de modèles cellulaires (on donne dans l'appendice A des conditions très simples impliquant les axiomes de ces catégories de modèles cellulaires).

La section 1 est consacrée à la construction de la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$. La fonctorialité élémentaire de cette construction est étudiée dans la section 2 : la notion d'application continue raisonnable de sites suspendus avec intervalle y est dégagée, ce qui permet de procéder comme dans [24]. Dans la section 3, on montre que si l'on suppose que T est une suspension, alors la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est naturellement munie d'une structure de catégorie triangulée ; les T-espaces de lacets y sont également étudiés, ce qui permet de donner une condition suffisante pour pouvoir définir les équivalences stables à la manière de [20]. La section 4 étudie le cas particulier des catégories homotopiques stables $\mathcal{SH}(S)$ des schémas noethériens ; leur fonctorialité élémentaire y est étudiée de façon à permettre la vérification des axiomes des foncteurs homotopiques stables ; d'après la thèse de Joseph Ayoub [4], il existe donc une théorie des foncteurs $f^!$ et $f_!$ pour les catégories $\mathcal{SH}(S)$. La section 5 vise à définir rigoureusement le foncteur « points complexes » $\mathcal{SH}(\mathbf{C}) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$: cette construction utilise les résultats de la section 2 et ceux de Daniel Dugger, Sharon Hollander et Daniel Isaksen sur les hyper-recouvrements (cf. [10] et [11]). Enfin, dans la section 6, on propose une définition d'une variante « naïve » de la catégorie $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$: admettant une description très simple à partie de la catégorie homotopique pointée $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$, cette catégorie s'avère être équivalente au quotient de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ par l'idéal de morphismes (de carré nul) constitué par les morphismes dits « stablement fantômes ».

Je remercie l'institut de recherche Harish-Chandra à Allahabad (Inde) pour son hospitalité, et son excellent cadre de travail qui m'a permis de finaliser cet article qui est dérivé de ma thèse [26].

1. Construction

1.1. Rappels sur la construction de Morel et Voevodsky. — Soit $\mathscr{S}$ un site (c'est-à-dire une petite catégorie [(1)], aussi notée $\mathscr{S}$, munie d'une topologie de Grothendieck, cf. SGA 4 II). On note $\mathbf{Prefais}(\mathscr{S})$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur la catégorie sous-jacente au site $\mathscr{S}$ et $\mathbf{Fais}(\mathscr{S})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Prefais}(\mathscr{S})$ formée des faisceaux pour la topologie donnée. On note $a\colon \mathbf{Prefais}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Fais}(\mathscr{S})$ le foncteur faisceau associé, adjoint à gauche de l'inclusion $\mathbf{Fais}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Prefais}(\mathscr{S})$.

Définition 1.1. — La catégorie $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ des espaces sur $\mathscr{S}$ désignera au choix soit la catégorie $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Prefais}(\mathscr{S})$ des préfaisceaux simpliciaux, soit la catégorie $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathscr{S})$ des faisceaux simpliciaux.

La notion d'équivalence faible simpliciale dans la catégorie $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ est définie dans [19]. Une définition équivalente faisant intervenir les faisceaux d'homotopie est suggérée dans [24, remark 1.3, page 48]. Pour la commodité du lecteur, voici une définition possible de la notion d'équivalence faible simpliciale dans le cas particulier des sites ayant suffisamment de points (cf. SGA 4 IV 6.4.1) :

Définition 1.2. — Soit $(\Phi_i)_{i\in I}$ une famille conservative de foncteurs fibres sur $\mathscr{S}$ indexée par un ensemble I. On dit d'un morphisme $f\colon X \to Y$ dans $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ que c'est une équivalence faible simpliciale si pour tout $i \in I$, le morphisme $\Phi_i(f)\colon \Phi_i(X) \to \Phi_i(Y)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

(1) Dans les exemples, la catégorie sous-jacente ne sera pas forcément petite, mais seulement essentiellement petite, à savoir équivalente à une petite catégorie. Il sera sous-entendu que l'on remplace la catégorie en question par une petite catégorie qui lui est équivalente ; il est facile de vérifier que les catégories construites par la suite pour deux choix initiaux donneront naturellement des catégories équivalentes.

Théorème 1.3 (Joyal, Jardine [19]). — *Munie des monomorphismes comme cofibrations, des équivalences faibles simpliciales comme équivalences faibles et des morphismes possédant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales comme fibrations, la catégorie* $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ *est une catégorie de modèles fermée propre et simpliciale (cf.* [25] *ou* [13]*). On note* $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$ *sa catégorie homotopique (obtenue en inversant formellement les équivalences faibles simpliciales dans* $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$*).*

À partir de maintenant, on suppose que le site $\mathscr{S}$ est muni d'un objet I. La version I-localisée de $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$ est obtenue grâce à une localisation à la Bousfield :

Définition 1.4. — Un objet X de $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$ est I-local si pour tout objet Y de $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$, l'application évidente

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})}(Y,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})}(Y\times I,X)$$

est bijective. Un morphisme $f\colon X\to Y$ dans $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ (ou dans $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$) est une I-équivalence faible si pour tout objet I-local Z de $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$, f induit une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})}(X,Z)\ .$$

Une I-fibration est un morphisme dans $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ possédant la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes qui sont aussi des I-équivalences faibles.

Théorème 1.5 ([24, theorem 3.2, page 86]). — *La catégorie* $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ *munie des monomorphismes comme cofibrations, des* I*-équivalences faibles comme équivalences faibles et des* I*-fibrations comme fibrations est une catégorie de modèles fermée dont on note* $\mathscr{H}(\mathscr{S},I)$ *la catégorie homotopique.*

La démonstration de ce théorème dans [24] fait intervenir le résultat technique [24, corollary 2.20, page 77] qui n'y est qu'esquissé. Donnons-en une autre démonstration. Il s'agit de montrer l'existence d'une localisation à la Bousfield. Pour cela, on peut utiliser les techniques générales de [15]. La démonstration du théorème 1.3 montre que la structure simpliciale de catégorie de modèles sur $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ est à engendrement cofibrant. Il résulte de la proposition A.4 (voir aussi la remarque A.6) que la structure simpliciale sur $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ est cellulaire au sens de [15, definition 12.1.1]. D'après le théorème [15, theorem 4.1.1], pour obtenir l'existence de cette localisation à la Bousfield, il suffit de construire un *ensemble* de flèches S dans $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ tel que pour tout objet simplicialement fibrant X de $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$, les deux conditions suivantes soient équivalentes :

- X est I-local ;
- pour toute flèche $f\colon A\to B$ appartenant à S, le morphisme d'ensembles simpliciaux $\hom(B,X)\to\hom(A,X)$ est une équivalence faible.