

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

APPROXIMATIONS RELIÉES À LA COHOMOLOGIE GALOISIENNE

David Harari

**Tome 135
Fascicule 4**

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-

QUELQUES PROPRIÉTÉS D'APPROXIMATION RELIÉES À LA COHOMOLOGIE GALOISIENNE D'UN GROUPE ALGÈBRIQUE FINI

PAR DAVID HARARI

RÉSUMÉ. — On étudie différentes propriétés d'approximation pour des espaces homogènes X (à stabilisateur fini) de GL_n sur un corps de nombres. On discute également du lien avec le problème de Galois inverse et on établit une formule pour le groupe de Brauer non ramifié de X .

ABSTRACT (*Some approximation properties related to Galois cohomology of a finite algebraic group*)

We prove some results about miscellaneous approximation properties for homogeneous spaces X (with finite stabilizer) of GL_n over a number field. We also discuss a link to the inverse Galois problem and we give a formula for the unramified Brauer group of X .

Soient k un corps de nombres, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et k_v le complété de k en une place v . Si v est une place non archimédienne de k , on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de k_v et $\mathbb{F}_v$ son corps résiduel. L'extension maximale non ramifiée de k_v sera notée k_v^{nr} . On appelle $\mu(k)$ le groupe des racines de l'unité appartenant à k .

On considère un k -groupe algébrique fini G . On note $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k et $H^1(k, G) := H^1(\Gamma_k, G(\bar{k}))$ l'ensemble pointé de

Texte reçu le 15 février 2007, révisé le 18 septembre 2007

DAVID HARARI, Université de Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

E-mail : David.Harari@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 11E72, 11G35.

Mots clefs. — Approximation faible, espace homogène, Groupe de Brauer.

cohomologie galoisienne associé (cf. [14], I.5). Le but de cet article est d'étudier l'image de l'application diagonale

$$j_S : H^1(k, G) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^1(k_v, G)$$

en relation avec des propriétés de type « approximation faible » sur le quotient de GL_n par G pour une représentation fidèle de G .

1. Différentes propriétés d'approximation

1.1. Approximation faible et très faible. — On dira que G vérifie la propriété (AF) (pour « approximation faible ») si pour tout ensemble fini S de places de k , l'application diagonale

$$j_S : H^1(k, G) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^1(k_v, G)$$

est surjective. On dit que G vérifie la propriété (ATF) (pour « approximation très faible ») s'il existe un ensemble fini S_0 de places de k , tel que pour tout ensemble fini de places S disjoint de S_0 , l'application j_S soit surjective. Comme on le verra plus bas, ces notions sont liées à des propriétés d'approximation sur une certaine variété algébrique, d'où la terminologie employée ici.

Voici quelques résultats connus concernant ces propriétés :

a) Si G est abélien, alors il vérifie (ATF) et on peut prendre pour S_0 l'ensemble constitué des places de mauvaise réduction de G et des places divisant l'exposant de $G(\bar{k})$ (cf. Neukirch [10]).

b) Pour $k = \mathbb{Q}$, $G = \mathbb{Z}/8$ (vu comme k -groupe constant) et $S = \{2\}$, l'application j_S n'est pas surjective (cf. Wang [17]).

c) Si G est constant (i.e. $G(k) = G(\bar{k})$), résoluble et d'exposant premier au cardinal de $\mu(k)$, alors G vérifie (AF) (cf. Neukirch [11]).

Comme l'a remarqué Colliot-Thélène, la propriété (ATF) pour un groupe constant G implique que G est groupe de Galois sur k . Une légère modification de son argument permet d'obtenir la même conclusion sous une hypothèse plus faible, voir la section 4

Notons aussi qu'on ne connaît aucun k -groupe fini G qui soit un contre-exemple à (ATF). Il semble en tout cas raisonnable de conjecturer que tout k -groupe fini G avec $G(\bar{k})$ résoluble vérifie cette propriété, en accord avec le théorème de Shafarevitch qui dit que tout groupe fini résoluble est groupe de Galois sur k . Le but de cet article est de présenter quelques nouveaux résultats (théorèmes 1 et 2 énoncés plus bas) dans cette direction, en utilisant notamment la notion d' *obstruction de Manin* à l'approximation faible.

1.2. Interprétation géométrique. — Si X est une k -variété, on notera $H^1(X, G)$ l'ensemble de cohomologie, défini via les cocycles de Čech pour la topologie étale (cf. [15], 2.2). Cet ensemble classe les X -torseurs sous G , et on notera $[Y]$ la classe d'un tel torseur dans $H^1(X, G)$. Rappelons que si X est une k -variété lisse, on dit que X vérifie *l'approximation très faible* (notion due à Serre) s'il existe un ensemble fini de places S_0 de k tel que pour tout ensemble fini S de places de k disjoint de S_0 , tout point $(P_v)_{v \in S}$ de $\prod_{v \in S} X(k_v)$ soit dans l'adhérence de $X(k)$ pour la topologie produit. On dit que X vérifie *l'approximation faible* si on peut prendre $S_0 = \emptyset$ dans la définition ci-dessus. Les deux propriétés sont invariantes par transformation k -birationnelle entre variétés lisses.

Le lien avec les propriétés correspondantes définies précédemment pour un k -groupe fini G est le suivant. On considère une représentation linéaire fidèle de G , i.e. un morphisme injectif de k -groupes $G \rightarrow \mathrm{GL}_n$, et on s'intéresse au quotient $V = \mathbb{A}_k^n / G$ associé. On peut également considérer le quotient GL_n / G , ou encore prendre un plongement de G dans SL_n et le quotient associé SL_n / G . D'après le lemme sans nom (cf. [3], corollaire 3.9), on obtient toujours, à stable équivalence k -birationnelle près, la même k -variété V , et celle-ci ne dépend pas non plus de la représentation fidèle choisie.

D'autre part, si par exemple on travaille avec $X = \mathrm{SL}_n / G$ (la même chose vaut si on remplace SL_n / G par un ouvert lisse de $V = \mathbb{A}_k^n / G$ ou de GL_n / G), alors comme la cohomologie galoisienne de SL_n est triviale (théorème de Hilbert 90) le G -torseur $\mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{SL}_n / G$ est *versel*, au sens de [5], I.5 : cela signifie que pour toute extension de corps K/k , toute classe $\alpha \in H^1(K, G)$, et tout ouvert de Zariski non vide U de SL_n / G , l'application d'évaluation $U(K) \rightarrow H^1(K, G)$ qui à P associe $[\mathrm{SL}_n](P)$ est surjective. On en déduit immédiatement le résultat bien connu suivant (cf. [1]) : la surjectivité de $j_S : H^1(k, G) \rightarrow \prod_{v \in S} H^1(k_v, G)$ est équivalente à la densité de $X(k)$ dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$. Ainsi la propriété que G vérifie (AF) (resp. (ATF)) est équivalente à la propriété analogue pour X (et ceci vaut aussi en remplaçant SL_n / G par tout ouvert lisse de $V = \mathbb{A}_k^n / G$ ou de GL_n / G).

1.3. Lien avec l'obstruction de Manin. — Il va maintenant être utile d'introduire une propriété intermédiaire entre (AF) et (ATF). Si X est une variété lisse et géométriquement intègre sur k , on note $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} X$ son *groupe de Brauer non ramifié* (cf. [3], §5), qui est aussi le groupe de Brauer ⁽¹⁾ d'une compactification lisse de X . On pose $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$. Soit Ω l'ensemble des places de k , puis $j_v : \mathrm{Br} k_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'invariant local ; on note $X(k_\Omega) = \prod_{v \in \Omega} X(k_v)$, et $X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$

(1) Dans tout ce texte, groupe de Brauer signifie groupe de Brauer cohomologique.

l'ensemble de Brauer-Manin de X , qui est le sous-ensemble de $X(k_\Omega)$ constitué des points $(P_v)_{v \in \Omega}$ qui vérifient

$$(1) \quad \sum_{v \in \Omega} j_v(\alpha(P_v)) = 0$$

pour tout élément α de $\text{Br}_{\text{nr}} X$ (noter que la somme est toujours finie, cf. [15], 5.2). Plus généralement, si C est un sous-groupe de $\text{Br}_{\text{nr}} X$, on notera $X(k_\Omega)^C$ l'ensemble des points de $X(k_\Omega)$ qui vérifient (1) pour tout α de C . D'après la loi de réciprocité du corps de classes global, l'ensemble $X(k_\Omega)^{\text{Br}_{\text{nr}}}$ contient l'adhérence $\overline{X(k)}$ de $X(k)$ dans $X(k_\Omega)$ pour la topologie produit des topologies v -adiques. Cette loi de réciprocité permet aussi de définir $X(k_\Omega)^C$ quand C est un sous-groupe du quotient $\text{Br}_{\text{nr}} X / \text{Br } k$, puisque (1) vaut toujours si α est un élément de $\text{Br } k$.

On dira que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour X si $\overline{X(k)} = X(k_\Omega)^{\text{Br}_{\text{nr}}}$ (cette propriété se conserve également par transformation k -birationnelle entre variétés lisses). Quand $\text{Br}_{\text{nr}} X / \text{Br } k$ est fini (par exemple si X est $\bar{k}$ -unirationnelle), ceci implique que X vérifie l'approximation très faible. On dira qu'un k -groupe fini G vérifie la propriété (BM) si l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour un ouvert lisse X du quotient $V = \mathbb{A}_k^n / G$ défini comme ci-dessus (ou encore pour GL_n / G ou SL_n / G), qui est une variété k -unirationnelle. On a donc, pour un k -groupe fini G , les implications suivantes :

$$(AF) \implies (BM) \implies (ATF).$$

Par exemple quand G est abélien, la variété V est stablement k -birationnelle à un k -tore (cf. [16], th. 1 et rem. p. 85) et G vérifie (BM) d'après [13].

L'interprétation de la propriété (BM) en termes de la cohomologie galoisienne de G est plus compliquée que pour (AF) ou (ATF), et est liée au calcul du sous-groupe $\text{Br}_{\text{nr } 1} X = \ker[\text{Br}_{\text{nr}} X \rightarrow \text{Br}_{\text{nr}} \overline{X}]$ de $\text{Br}_{\text{nr}} X$. Voir la section 5 pour un résultat dans cette direction. On ne connaît pas d'exemple de k -groupe fini G qui ne vérifie pas (BM), mais les résultats de la section 5 sembleraient plutôt aller dans le sens de l'existence de ce type de groupes.

1.4. Énoncé des résultats principaux. — Le but de cet article est d'établir que certains groupes G obtenus comme des extensions vérifient (BM). Plus précisément le résultat est le suivant.

THÉORÈME 1. — Soit

$$1 \rightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \rightarrow 1$$

une extension scindée de k -groupes finis, avec A abélien. Alors :

- si G vérifie (BM), la même propriété vaut pour E ;