Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MINORATIONS SIMULTANÉES DE FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

Éric Gaudron

Tome 142
Fascicule 1

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 1-61

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 142, janvier 2014

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`smf@smf.univ-mrs.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € ($ 519)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
142 (1), 2014, p. 1–61

MINORATIONS SIMULTANÉES DE FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Éric Gaudron

Résumé. — Soit p un nombre premier ou $p=\infty$ et k un corps de nombres plongé dans $\mathbf{C}_p$. Soit $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ et $u_1,\dots,u_n\in\mathbf{C}_p$ tels que $e^{u_j}\in k$ pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$. Soit $(\beta_{i,j})$, $1\le i\le t$, $1\le j\le n$, une matrice $t\times n$ à coefficients dans k. Soit $(\beta_{1,0},\dots,\beta_{t,0})\in k^t$. Posons $\Lambda_i:=\beta_{i,0}+\sum_{j=1}^n\beta_{i,j}u_j\in\mathbf{C}_p$ pour tout $i\in\{1,\dots,t\}$. Nous obtenons des minorations de $\max\{|\Lambda_i|_p\,;\ 1\le i\le t\}$ explicites en tous les paramètres, lorsque ce maximum n'est pas nul. Ces minorations englobent de nombreux résultats antérieurs. La démonstration repose sur la méthode de Baker-Philippon-Waldschmidt, la réduction d'Hirata-Kohno, le procédé de changement de variables de Chudnovsky, repensés avec les outils modernes de la théorie des pentes adéliques (*méthode de la section auxiliaire*). Au passage, nous montrons comment étendre le lemme de Siegel absolu de Zhang au cadre des fibrés adéliques hermitiens et nous établissons un nouveau lemme de Siegel approché.

Abstract (*Simultaneous lower bounds for linear forms in logarithms of algebraic numbers*)

This work falls within the theory of linear forms in logarithms over a commutative *linear* algebraic group defined over a number field. We give lower bounds for simultaneous linear forms in logarithms of algebraic numbers, treating both the archimedean and p-adic cases. The proof includes Baker's method, Hirata's reduction, Chudnovsky's

Texte reçu le ??? et accepté le ???.

Éric Gaudron, Université Blaise Pascal, Laboratoire de Mathématiques, Campus universitaire des Cézeaux, UMR 6620, BP 80026, 63177 Aubières Cedex, France • *E-mail :* `Eric.Gaudron@math.univ-bpclermont.fr` • *Url :* `http://math.univ-bpclermont.fr/~gaudron`

Classification mathématique par sujets (2010). — 11J86 (11J61,14G40).

Mots clefs. — Formes linéaires de logarithmes, approximation simultanée, méthode de Baker, réduction d'Hirata-Kohno, changement de variables de Chudnovsky, méthode de la section auxiliaire, fibré adélique hermitien, lemme de Siegel absolu, lemme de Siegel approché.

process of variable change. The novelty is that we integrate into the proof the modern tools of adelic slope theory (*auxiliary section method*), using a new small values Siegel's lemma.

1. Introduction

Ce texte présente une minoration simultanée de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, valide pour un plongement quelconque (complexe ou ultramétrique) du corps de nombres ambiant. En d'autres termes il s'agit de minorer $\max\{|\Lambda_i|_{p_0}\,;\ 1 \leq i \leq t\}$ où Λ_i est de la forme $\beta_{i,0} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} u_j$ avec $\beta_{i,j}$ et e^{u_j} dans un corps de nombres k plongé dans $\mathbf{C}_{p_0}$ et $|\cdot|_{p_0}$ est une valeur absolue sur le complété $\mathbf{C}_{p_0}$ d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_{p_0}$ (p_0 est un nombre premier ou $p_0 = \infty$ avec la notation $\mathbf{C}_\infty := \mathbf{C}$) .

Depuis les travaux de Baker entrepris au milieu des années soixante, de nombreux articles ont été consacrés à l'étude de cas particuliers de ce problème. En très grande majorité les auteurs s'intéressaient à *une* seule forme linéaire ($t = 1$) et, souvent, seulement au cas d'un plongement archimédien. Si le plongement était ultramétrique alors ils supposaient $\beta_{i,j} \in \mathbf{Q}$. Plus précisément, dès que $t \geq 2$, et si l'on écarte les travaux de Philippon & Waldschmidt [25] et d'Hirata-Kohno [17] qui traitent le cas très général d'un groupe algébrique commutatif quelconque, seuls Ramachandra [27] et Loxton [18] ont étudié la question qui nous intéresse ici (cas archimédien). Lorsque le plongement est ultramétrique, ne semble exister que l'étude de Dong [8], qui traite un cas particulier de la question ($\beta_{i,j} \in \mathbf{Z}$, $\beta_{i,0} = 0$). Ainsi, en dépit de la richesse de la littérature sur le thème des formes linéaires de logarithmes(1), l'on ne trouve guère de résultats généraux qui prennent en compte plusieurs formes linéaires et aucun qui ne considère à la fois le cas archimédien et le cas p-adique. Un des objectifs de cet article est de combler cette lacune, tout en donnant une minoration qui soit en phase avec celles présentées dans [38].

Étant donné un nombre algébrique α, on désigne par $h(\alpha)$ la hauteur de Weil logarithmique absolue de α. Si x est un nombre réel alors $[x]$ est la partie entière de x.

Théorème 1.1. — *Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Soit k un sous-corps de nombres de $\mathbf{C}$, de degré D sur $\mathbf{Q}$. Soit $t \in \{1, \ldots, n\}$ et*

$$(\beta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathrm{M}_{t,n}(k)$$

(1) Nous renvoyons le lecteur au livre très complet de Waldschmidt [38] pour en saisir l'étendue.

une matrice de rang maximal t. *Pour tout* $j \in \{1,\dots,n\}$, *soit* $u_j \in \mathbf{C}$ *tel que* $\alpha_j := e^{u_j} \in k$. *Soit* $b, a, \mathfrak{e}$ *des nombres réels positifs tels que* $\mathfrak{e} \geq e$,

$$\log a \geq \max_{1\leq j\leq n} \left\{ h(\alpha_j), \frac{\mathfrak{e}|u_j|}{D} \right\} \quad et \quad \log b \geq D \max_{\substack{1\leq i\leq t\\ 1\leq j\leq n}} \{1, h(\beta_{i,j})\}.$$

Soit $\mathfrak{a}$ *l'entier défini par*

$$\mathfrak{a} := \left[\frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log\left(e + \frac{D}{\log \mathfrak{e}} + n\log a \right) \right] + 1.$$

Si $\{u_1,\dots,u_n\}$ *est une famille libre sur* $\mathbf{Q}$ *alors aucune des formes linéaires de logarithmes*

$$\Lambda_i := \beta_{i,1}u_1 + \cdots + \beta_{i,n}u_n \quad (1 \leq i \leq t)$$

n'est nulle et elles vérifient la minoration

$$\log \max_{1\leq i\leq t} |\Lambda_i| \geq -(10n)^{58n^2/t} \mathfrak{a}^{1/t} (\log b + \mathfrak{a}\log \mathfrak{e}) \left(1 + \frac{D\log a}{\log \mathfrak{e}} \right)^{n/t}.$$

Cet énoncé est une conséquence d'un théorème plus général que l'on verra au § 5.2. Un résultat similaire sera aussi démontré dans le cas ultramétrique lorsque k est un sous-corps de $\mathbf{C}_{p_0}$. Dans le minorant du logarithme de $\max_{1\leq i\leq t} |\Lambda_i|$, on notera la dépendance linéaire (et donc optimale) en $\log b$ (hauteur des formes linéaires) et la dépendance usuelle $(\log a)^{n/t}(\log\log a)^{1+1/t}$ en $\log a$ (hauteur du point $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$). Hormis l'aspect général de cette minoration déjà évoqué (t et $k \hookrightarrow \mathbf{C}_{p_0}$ quelconques), mentionnons l'absence du discriminant du corps de nombres, qui apparaissait auparavant dans le cas simultané (comme dans l'article [17] d'Hirata-Kohno).

Cet article de synthèse n'apporte pas d'idée originale qui améliorerait de manière significative les résultats connus pour *une* forme linéaire. En revanche, la démonstration que nous proposons est, elle, plus novatrice dans sa forme car elle combine la trame de la méthode des fonctions auxiliaires classique avec les outils de la théorie des pentes adéliques (sans « méthode des pentes » proprement dite). Il en résulte un cumul des avantages propres à ces techniques : souplesse d'utilisation et simplicité de la démarche pour l'une, conservation de l'aspect intrinsèque des données et obtention aisée des constantes numériques pour l'autre. Nous expliquerons plus en détail notre approche au § 5.1. Si nous avons pris le parti d'écrire ce texte dans le cas d'un groupe linéaire, il serait cependant possible de généraliser à un groupe algébrique commutatif quelconque et même d'obtenir des constantes numériques explicites pour une variété abélienne, comme dans [10], *sans hypothèse* de non-torsion du point rationnel considéré (ici $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n(k)$).