
*Jean Bourgain*
*Photo J. P. Bolle, MESR*

## DOSSIERS

# MÉDAILLE FIELDS 1994
# JEAN BOURGAIN

Jean Bourgain est né en février 1954 à Ostende, en Belgique. Etudiant à l'Université libre de Bruxelles (la partie flamande, la VUB, bien qu'il soit francophone), il y reçoit une très bonne formation d'analyste, qui lui permet d'écrire sa première publication vers 20 ans. Il soutient une thèse en 1977 en théorie descriptive des ensembles et applications aux espaces de Banach, sous la direction de F. Delbaen.

Jean Bourgain commence sa carrière au Fonds National de la Recherche Scientifique de Belgique. Ses résultats en Analyse et en Géométrie des espaces de Banach sont de plus en plus remarqués, et ses séjours à l'étranger se multiplient : en France, à Paris 6 et Paris 11, en Israël et aux Etats-Unis. En 1985 il est nommé professeur à la VUB et il accepte, la même année, l'un des six postes de professeur permanent à l'IHES. Cet institut a compté ou compte parmi ses membres René Thom, Alexandre Grothendieck, Pierre Deligne et Alain Connes (Médailles Fields en 1958, 1966, 1978 et 1982 respectivement). A peu près au même moment, il est nommé titulaire de la chaire Doob à l'Université d'Illinois à Urbana. C'est dire que, déjà à cette époque, l'ensemble des travaux de Jean Bourgain est impressionnant et en fait un candidat potentiel à la médaille Fields. Depuis 1994 Jean Bourgain est en détachement de l'IHES; il a été nommé professeur à l'Institute for Advanced Study de Princeton.

Jean Bourgain n'a pas jusqu'à présent encadré d'étudiants. Il a de nombreuses collaborations internationales. Pendant longtemps, il a travaillé très tard la nuit, se levant à midi et ne donnant presque jamais de conférence le matin; c'est devenu plus difficile depuis qu'il est père d'un petit garçon, qui a maintenant trois ans.

De façon un peu simpliste, on peut dire que certains mathématiciens bâtissent de grandes théories, tandis que d'autres s'attaquent directement aux problèmes qui ont résisté aux efforts de leurs prédécesseurs. Jean Bourgain appartient à la deuxième catégorie; il a publié plus de 200 articles; dans de nombreux cas (pas tous, bien sûr) il résout un problème difficile, posé par les spécialistes d'un sujet. Ces contributions sont d'autant plus impressionnantes qu'elles arrivent après un grand développement de l'Analyse dans les années 60 et 70 (avec Carleson, Stein, Fefferman entre autres).

On peut comparer Jean Bourgain aux analystes les plus importants de ce siècle, par exemple aux grands analystes des années 20–30 : Hardy, Weyl, Wiener, Carleman, Levinson. Sa puissance analytique rappelle celle de Carleson, et son œuvre couvre la plupart des directions de l'analyse classique. Bourgain a une capacité remarquable pour apprendre un nouveau sujet rapidement, comprendre le cœur du problème, et utiliser alors son vaste répertoire techniques et son incroyable puissance analytique pour résoudre des problèmes majeurs dans des directions nouvelles pour lui. Plusieurs sujets ont été transformés par son travail, et placés à un niveau de profondeur et de raffinement bien plus élevé.

Les travaux de Jean Bourgain portent sur des domaines très variés de l'Analyse : géométrie des espaces de Banach, analyse harmonique, analyse réelle et complexe, analyse et théorie des nombres, théorie ergodique et équations aux dérivées partielles non linéaires. Les techniques utilisées, très fines et puissantes, mélangent avec virtuosité des outils d'analyse, de probabilités et de géométrie, ainsi que des arguments combinatoires.

Il n'est pas facile de trouver des mathématiciens pouvant donner un avis pertinent sur l'ensemble des travaux de Jean Bourgain. Nous avons donc demandé à une dizaine de collègues[1] de décrire, en peu de mots, les travaux qu'ils connaissent le mieux. De ce fait, des aspects très importants de l'œuvre de Jean Bourgain seront ici passés sous silence, et nous renverrons le lecteur à d'autres sources, par exemple l'article de J. Lindenstrauss dans les Notices of the AMS, Nov-Dec 94.

Le premier article de Bourgain paraît en 1976 dans les Proceedings of the AMS; l'auteur a alors 22 ans! Dans cet article il retrouve par une méthode "géométrique" le théorème de Lindenstrauss-Troyanski selon lequel tout convexe faiblement compact $C$ dans un espace de Banach $X$ est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés ($x$ est fortement exposé dans $C$ s'il existe une forme linéaire continue $x^*$ sur $X$ pour laquelle toute suite $(x_n)$ de $C$ *maximisante* pour $x^*$ — c'est-à-dire que $\lim x^*(x_n) = \sup x^*(C)$ — converge en norme vers $x$). Pendant plusieurs années, Bourgain va s'intéresser à la propriété de Radon-Nikodym et plus généralement à la géométrie de dimension infinie des ensembles convexes; pour expliquer rapidement la propriété de Radon-Nikodym, rappelons qu'une fonction à valeurs réelles, harmonique et bornée dans le disque unité du plan admet une limite radiale suivant presque tout rayon; ceci n'est plus vrai pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach $X$, et on dit précisément que $X$ vérifie la propriété de Radon-Nikodym lorsque ces limites radiales (en norme) existent dans $X$ pour toute fonction harmonique bornée dans le disque et à valeurs dans $X$. Il existe des formulations équivalentes en termes de martingales vectorielles, ou de mesures vectorielles (c'est ce dernier point de vue qui est à l'origine de la dénomination). Bourgain obtient des

[1] Ont collaboré à cet article Myriam Déchamps, Gilles Godefroy, Bernard Maurey, Alain Pajor, Gilles Pisier, Martine et Hervé Queffélec, Jean-Claude Saut et Jean-Paul Thouvenot.

résultats frappants sur la notion plus fine de *convexe vérifiant la propriété de Radon-Nikodym*, tels que le théorème suivant, amélioration d'un théorème de Phelps : si $C$ est un convexe de Radon-Nikodym, l'ensemble des formes linéaires qui exposent fortement le convexe $C$ contient un $G_\delta$ dense dans le dual. Appliqué aux fonctions, ce théorème donne un principe de perturbation très intéressant : si $f$ est une fonction réelle semi-continue inférieurement minorée sur un convexe de Radon-Nikodym, l'ensemble des formes linéaires $x^*$ telles que $f + x^*$ atteigne son minimum sur $C$ contient un $G_\delta$ dense dans le dual. A 25 ans, Jean Bourgain donne un cours de troisième cycle à Paris 6, dont les notes, publiées par Paris 6, seront une source d'inspiration pour tous les chercheurs qui s'intéressent à la propriété de Radon-Nikodym.

Parallèlement, il travaille sur des problèmes aux frontières de la topologie (classes de Baire) et de la théorie descriptive des ensembles. Szlenk avait introduit un indice ordinal attaché à tout Banach séparable réflexif, et cet indice lui avait permis de montrer qu'il n'existe pas d'espace de Banach réflexif séparable universel, c'est à dire contenant une copie isomorphique de tout Banach réflexif séparable. Jean Bourgain introduit diverses notions d'indice ordinal qui lui permettent de montrer la non-existence d'espaces universels pour de nouvelles classes d'espaces de Banach. Jean Bourgain a appliqué à plusieurs reprises les méthodes de théorie descriptive liées au "théorème de la borne", qui associe un ordinal dénombrable à tout arbre dénombrable *bien fondé*, c'est à dire un arbre sans branche infinie. Si $T$ est un arbre dénombrable bien fondé, on peut l'épuiser par une succession ordinale dénombrable d'opérations qui consistent à lui retrancher ses "feuilles". Avec Rosenthal et Schechtman, il obtient, en utilisant entre autres choses une notion convenable d'indice ordinal associée à des arbres bien fondés dont les noeuds sont des suites finies de vecteurs d'un Banach, l'existence d'une famille non-dénombrable de sous-espaces complémentés de $L_p$ deux à deux non isomorphes (lorsque $1 < p < \infty$).

Un de ses premiers articles impressionnants est consacré aux espaces $\mathcal{L}_\infty$ (en collaboration avec Delbaen). Les espaces $\mathcal{L}_\infty$ sont une généralisation des espaces $\ell_\infty$ (suites bornées de scalaires), $c_0$ (suites tendant vers 0), $C(K)$ (fonctions continues sur un compact) ou bien $L_\infty(\Omega, \mu)$ (fonctions mesurables bornées presque sûrement sur $\Omega$). Jusqu'au travail de Bourgain, on pensait que les espaces $\mathcal{L}_\infty$ étaient forcément tous "très gros", comme l'espace $\ell_\infty$ usuel qui contient tout espace de Banach séparable comme sous-espace. L'article mentionné montre qu'il n'en est rien : il existe des espaces $\mathcal{L}_\infty$ qui ne contiennent pas de sous-espace isomorphe à $c_0$. Ces espaces possèdent en fait les propriétés de Radon-Nikodym et de Schur qui sont des propriétés classiques de l'espace $\ell_1$. Ces espaces $\mathcal{L}_\infty$ se comportent d'ailleurs "transversalement" si l'on peut dire, beaucoup plus comme $\ell_1$ que comme $\ell_\infty$. Ces exemples retentissants ont complètement bouleversé l'idée que l'on se faisait des espaces $\mathcal{L}_\infty$. Par la suite, Bourgain a appliqué avec succès des idées tout à fait différentes au cas des espaces $\mathcal{L}_1$, mais il n'y a pas la place ici de développer ici la description de ces travaux pourtant fort beaux.

Au début des années 80, Jean Bourgain a opéré un tournant et s'est intéressé de près aux questions laissées ouvertes sur les espaces de Banach de fonctions analytiques (espaces $H_1$ et $H_\infty$ de Hardy principalement). Rappelons que $H_\infty$ est l'espace des fonctions analytiques bornées dans le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$. Son résultat le plus spectaculaire dans cette direction est peut-être sa démonstration que l'espace $H_\infty$ vérifie le théorème de Grothendieck. L'une des formes du théorème de Grothendieck dit que tout opérateur linéaire borné de $L_\infty$ dans $L_1$ se factorise par $L_2$ (une forme équivalente est "l'inégalité de Grothendieck"). Bourgain démontre un théorème de factorisation qui implique que tout opérateur linéaire borné de $H_\infty$ dans $H_1$ se factorise par $H_2$. Par dualité cela se traduit par des inégalités étonnantes (et très utiles) vérifiées par l'espace de Banach quotient $L_1/H_1$ qui est le prédual de $H_\infty$. Par exemple celle-ci : si une série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ avec $x_n \in L_1/H_1$ converge inconditionnellement dans $L_1/H_1$ alors nécessairement $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$. Il démontre pour ces besoins une série de raffinements du lemme de Havin, qui construit des fonctions de $H_\infty$ qui approchent dans une certaine mesure des fonctions caractéristiques de sous-ensembles du cercle et permet de généraliser certaines approches du théorème de Grothendieck pour $L_\infty$. Par la suite dans cette direction on peut citer deux autres contributions éblouissantes : la preuve que les algèbres de fonctions analytiques bornées $A(D^n)$ dans les polydisques $D^n$ sont mutuellement non isomorphes pour des valeurs distinctes de l'entier $n$, et aussi le théorème qui implique que les espaces $H_1$ du disque et du bidisque sont non isomorphes.

Mentionnons un résultat qui ne figure pas parmi les plus difficiles de Bourgain, mais qui a eu un grand impact tant il est simple et joli. On sait après Burkholder, Gundy et Silverstein, qu'on peut retrouver les propriétés de la transformation de Hilbert comme opérateur sur les $L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, à partir des martingales du brownien et des inégalités de Burkholder-Gundy. Mais on ne savait pas inversement parler des martingales à partir de la transformation de Hilbert. C'est ce que Bourgain obtient par une méthode de "transférence" utilisant un produit infini de copies du cercle $\mathbb{T}$. Cela permet de caractériser les espaces de Banach "UMD", étudiés peu avant par Burkholder, au moyen du fait que la transformée de Hilbert (vectorielle) sur $L_2(\mathbb{T}, X)$ est bornée. Ce résultat a beaucoup impressionné Burkholder et contribué à la venue de Jean Bourgain à Urbana, une étape d'une certaine importance dans sa carrière.

Dans beaucoup de questions d'Analyse harmonique se pose le problème de l'existence d'ensembles finis d'entiers $\Lambda_n = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$