

Torsten Schoeneberg

---

**SEMISIMPLE LIE ALGEBRAS AND  
THEIR CLASSIFICATION OVER  
p-ADIC FIELDS**

---

MÉMOIRES DE LA SMF 151

Société Mathématique de France 2017

---

**Comité de rédaction**

Christine BACHOC  
Emmanuel BREUILLARD  
Yann BUGEAUD  
Jean-François DAT  
Marc HERZLICH  
O' Grady KIERAN

Raphaël KRIKORIAN  
Julien MARCHÉ  
Laurent MANIVEL  
Emmanuel RUSS  
Christophe SABOT  
Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (dir.)

**Diffusion**

Maison de la SMF  
B.P. 67  
13274 Marseille Cedex 9  
France  
christian.smf@cirm-math.fr

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

**Tarifs 2017**

*Vente au numéro* : 35 € (\$52)

*Abonnement électronique* : 113 € (\$170)

*Abonnement avec supplément papier* : 162 €, *hors Europe* : 186 € (\$279)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

**Secrétariat : Nathalie Christiaën**

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
memsmf@ihp.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2017

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0249-633-X (print) 2275-3230 (electronic)

ISBN 978-2-85629-859-6

Stéphane SEURET  
Directeur de la publication

---

MÉMOIRES DE LA SMF 151

**SEMISIMPLE LIE ALGEBRAS AND  
THEIR CLASSIFICATION OVER  
 $p$ -ADIC FIELDS**

**Torsten Schoeneberg**

**Société Mathématique de France 2017**  
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

*T. Schoeneberg*

Torsten Schoeneberg, Camosun College, 3100 Foul Bay Rd, Victoria BC V8P 5J2.

*E-mail* : `torsten.schoeneberg@gmail.com`

---

**2010 Mathematics Subject Classification.** — 17B05, 17B20, 17B22.

**Key words and phrases.** — Semisimple Lie algebras, Classification, p-adic fields, Tits index.

---

# SEMISIMPLE LIE ALGEBRAS AND THEIR CLASSIFICATION OVER $p$ -ADIC FIELDS

Torsten Schoeneberg

**Abstract.** — We study semisimple Lie algebras over fields of characteristic zero, with emphasis on  $p$ -adic fields and aiming at classification. We first transfer parts of the structure theory of reductive algebraic groups to our setting, with some variations. Classifying invariants are attached to Lie algebras and visualised with Satake-Tits diagrams. We give necessary and sufficient criteria for these diagrams. Over general fields of characteristic zero, we then classify all quasi-split forms, and we adapt an older classification theory for the classical types  $A$ - $D$  to our language. Finally we focus on  $p$ -adic fields, where we achieve a complete classification by combination of certain well-known properties of these fields with our general results and methods, and we discuss the relation of this with a theorem of Kneser. This extends work by Weisfeiler.

## **Résumé (Algèbres de Lie semi-simples et leur classification sur les corps $p$ -adiques)**

Nous étudions les algèbres de Lie semi-simples sur les corps de caractéristique nulle, où l'accent est mis sur les corps  $p$ -adiques, l'objectif étant leur classification. Nous transférons d'abord certaines parties de la théorie de la structure des groupes réductifs dans notre contexte, avec quelques variations. Des invariants classifiants sont attachés aux algèbres de Lie et sont visualisés à l'aide de diagrammes de Satake-Tits. Nous donnons des critères nécessaires et suffisants pour ces diagrammes. Sur les corps généraux de caractéristique nulle, nous classifions ensuite toutes les formes quasi-déployées et nous traduisons une théorie ancienne de classification pour les types classiques  $A$ - $D$  dans notre langue. Nous mettons enfin l'accent sur les corps  $p$ -adiques, où nous obtenons une classification complète par combinaison de certaines propriétés bien connues sur ces corps avec nos résultats généraux et nos méthodes, et nous abordons la relation de ces résultats avec un théorème de Kneser. Tout cela prolonge un travail de Weisfeiler.



## CONTENTS

<b>1. Introduction</b> .....	3
<b>2. Prerequisites</b> .....	9
2.1. Lie algebras and root systems .....	9
2.2. $\mathfrak{p}$ -adic fields, C1 fields, quaternion algebras .....	15
2.3. Quadratic, symplectic and hermitian forms .....	16
<b>3. Structure theory and the isomorphism theorem</b> .....	19
3.1. Definition of the invariants .....	19
3.2. Special cases and examples .....	47
3.3. The isomorphism theorem .....	54
3.4. Visualisation: Satake-Tits diagrams .....	61
<b>4. Classification over general fields</b> .....	65
4.1. Reduction to absolutely simple Lie algebras .....	65
4.2. Galois cohomology and forms of certain types .....	68
4.3. Necessary and sufficient conditions on the index .....	72
4.4. Skew fields and anisotropic types .....	77
4.5. Involutional algebras and the classical types .....	79
4.6. Quasi-split forms .....	95
<b>5. Classification over special fields</b> .....	99
5.1. C1 fields and unramified splitting for $\mathfrak{p}$ -adic fields .....	99
5.2. Type <i>AI</i> and Kneser's theorem .....	101
5.3. Tools for ruling out anisotropic forms: The prime degree case .....	103
5.4. Types AII, B, C and D over $\mathfrak{p}$ -adic fields .....	112
5.5. Exceptional Lie algebras over $\mathfrak{p}$ -adic fields .....	116
<b>6. Concluding remarks</b> .....	141
6.1. The field $k = \mathbb{R}$ .....	141
6.2. $k$ -rational approaches (Allison, Seligman) .....	141
6.3. Explicit constructions for exceptional types .....	142
<b>Bibliography</b> .....	143





To the memory of Michel Lazard and Boris Weisfeiler

[...] Und es starben  
Noch andere viel. Mit eigener Hand  
Viel traurige, wilden Muths, doch göttlich  
Gezwungen, zuletzt, die anderen aber  
Im Geschike stehend, im Feld. [...]

Hölderlin, *Mnemosyne*



