Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 165
Nouvelle série

JOINT ET TRANCHES POUR LES ∞-CATÉGORIES STRICTES

Dimitri ARA & Georges MALTSINIOTIS

2 0 2 0

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de rédaction

Christine BACHOC
Yann BUGEAUD
Jean-François DAT
Clotilde FERMANIAN
Pascal HUBERT
Laurent MANIVEL
Julien MARCHÉ
Kieran O'GRADY
Emmanuel RUSS
Christophe SABOT
Marc HERZLICH (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 45 € ($ 67)
Abonnement électronique : 113 € ($ 170)
Abonnement avec supplément papier : 167 €, hors Europe : 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`memoires@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

© *Société Mathématique de France 2020*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-85629-921-0

`doi:10.24033/msmf.473`

Directeur de la publication : Fabien DURAND

MÉMOIRES DE LA SMF 165

JOINT ET TRANCHES POUR LES ∞-CATÉGORIES STRICTES

Dimitri Ara

Georges Maltsiniotis

Société Mathématique de France 2020

Dimitri Ara

Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France.

E-mail : `dimitri.ara@univ-amu.fr`

Url : `http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/dimitri.ara/`

Georges Maltsiniotis

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot,
Case Postale 7012, Bâtiment Sophie Germain, 75205 Paris Cedex 13, France.

E-mail : `georges.maltsiniotis@imj-prg.fr`

Url : `http://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/`

Reçu le 4 avril 2016, révisé le 17 mars 2017, accepté le 9 septembre 2019.

***Classification mathématique par sujets* (2000). –** 18A25, 18D05, 18D20, 18G30, 18G35, 18G55, 55U10, 55U15.

***Mots-clefs.* –** ∞-catégories de Gray, ∞-catégories strictes, catégories monoïdales, catégories monoïdales localement bifermées, complexes dirigés augmentés, joint, nerf de Street, orientaux, produit tensoriel de Gray, tranches, transformations lax.

***Key words and phrases.* –** Gray ∞-categories, strict ∞-categories, monoidal categories, locally biclosed monoidal categories, augmented directed complexes, join, Street's nerve, orientals, Gray tensor product, slices, lax transformations.

JOINT ET TRANCHES POUR LES ∞-CATÉGORIES STRICTES

Dimitri Ara, Georges Maltsiniotis

***Résumé.* –** Le but de cet ouvrage est de développer une théorie du joint et des tranches pour les ∞-catégories strictes. À deux ∞-catégories strictes, on en associe une troisième qu'on appelle leur joint. Cette opération est compatible au joint usuel des catégories à troncation près. On montre que le joint définit une structure de catégorie monoïdale sur la catégorie des ∞-catégories strictes et qu'il commute aux limites inductives connexes en chaque variable. En particulier, on obtient l'existence de certains adjoints à droite ; ces adjoints définissent des tranches ∞-catégoriques, en un sens généralisé. On énonce des conjectures de fonctorialité du joint et des tranches par rapport aux transformations lax et oplax supérieures et on démontre des premiers résultats dans ce sens. Ces résultats sont utilisés dans un autre travail pour établir un théorème A de Quillen ∞-catégorique. Enfin, dans un appendice, on revisite le produit tensoriel de Gray ∞-catégorique. Un des principaux outils utilisés dans ce travail est la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner.

***Abstract* (Join and slices for strict ∞-categories). –** The goal of this book is to develop a theory of join and slices for strict ∞-categories. To any pair of strict ∞-categories, we associate a third one that we call their join. This operation is compatible with the usual join of categories up to truncation. We show that the join defines a monoidal category structure on the category of strict ∞-categories and that it respects connected inductive limits in each variable. In particular, we obtain the existence of some right adjoints; these adjoints define ∞-categorical slices, in a generalized sense. We state some conjectures about the functoriality of the join and the slices with respect to higher lax and oplax transformations and we prove some first results in this direction. These results are used in another paper to establish a Quillen Theorem A for strict ∞-categories. Finally, in an appendix, we revisit the Gray tensor product of strict ∞-categories. One of the main tools used in this paper is Steiner's theory of augmented directed complexes.

© Mémoires de la Société Mathématique de France 165, SMF 2020

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce travail, même s'il en est essentiellement indépendant, est issu d'un projet consacré à la théorie homotopique des ∞-catégories strictes, projet constitué actuellement des textes [**5**], [**2**], [**9**], [**6**], [**7**], [**3**] et [**8**], ainsi que de l'article [**21**] de Gagna. Ces travaux sont motivés par le fait que les ∞-catégories strictes fournissent des modèles des types d'homotopie plus proches de l'intuition géométrique que ceux fournis par les catégories. Une description détaillée de ce projet et de ses motivations se trouve dans l'introduction de [**6**]. C'est en travaillant sur un théorème A de Quillen pour les ∞-catégories strictes, résultat principal de [**6**] et [**7**], que le besoin de définir une théorie du joint et des tranches ∞-catégoriques généralisées s'est fait sentir. En effet, non seulement l'énoncé même du théorème A fait intervenir des tranches du type ${}_c\backslash C$, où c est un objet de C, mais surtout, sa démonstration, déjà pour les 2-catégories strictes, fait intervenir des tranches de la forme ${}_c\backslash C$, où c est un n-simplexe du nerf de C (voir la preuve de [**16**, théorème 2.16], preuve inspirée des références originales [**13**] et [**14**]). La motivation initiale du présent travail était de fournir les outils pour définir et étudier ces tranches généralisées pour les ∞-catégories en vue d'une démonstration d'un théorème A ∞-catégorique. Néanmoins, les notions de joint et de tranches ∞-catégoriques sont, nous semble-t-il, des notions fondamentales de la théorie des ∞-catégories strictes dont l'intérêt dépasse largement les applications qui les ont motivées.

Commençons par rappeler la situation pour le joint et les tranches en dimension 1, c'est-à-dire pour les catégories. Si A et B sont deux catégories, on définit une nouvelle catégorie $A \star B$, appelée le *joint* de A et B, de la manière suivante. Le graphe sous-jacent à $A \star B$ est le graphe sous-jacent à la somme disjointe $A \amalg B$ auquel on adjoint une flèche $j_{b,a}$ de a vers b pour tout couple (a, b) formé d'un objet a de A et d'un objet b de B. Les identités et la composition sont définies de la manière évidente. On obtient ainsi un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C}at \times \mathcal{C}at &\to \mathcal{C}at \\ (A, B) &\mapsto A \star B, \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}at$ désigne la catégorie des petites catégories. On vérifie facilement que le joint définit une structure de catégorie monoïdale sur $\mathcal{C}at$ d'unité la catégorie vide. Cette structure n'est pas bifermée mais est localement bifermée au sens suivant : pour toutes petites catégories A et B, les foncteurs

$$\begin{aligned} \mathcal{C}at &\to {}_{A}\backslash \mathcal{C}at \\ B &\mapsto (A \star B, \iota_1 : A \to A \star B) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \mathcal{C}at &\to {}_{B}\backslash \mathcal{C}at \\ A &\mapsto (A \star B, \iota_2 : B \to A \star B)\,, \end{aligned}$$

où

$$A \xrightarrow{\iota_1} A \star B \xleftarrow{\iota_2} B$$

désignent les foncteurs canoniques, admettent des adjoints à droite. On obtient ainsi des foncteurs

$$\begin{aligned} {}_{A}\backslash \mathcal{C}at &\to \mathcal{C}at \\ (C, u : A \to C) &\mapsto {}_{u}\backslash C \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} {}_{B}\backslash \mathcal{C}at &\to \mathcal{C}at \\ (C, v : B \to C) &\mapsto C/_{v} \end{aligned}$$

qu'on appelle respectivement les foncteurs *tranches généralisées au-dessous* et *au-dessus*. Explicitement, si $u : A \to C$ est un foncteur, les objets de la catégorie ${}_{u}\backslash C$ sont les cônes inductifs sur le diagramme u et les morphismes sont les morphismes de cônes en un sens évident. De même pour la catégorie $C/_{v}$ et les cônes projectifs. Si c est un objet de C, on peut considérer c comme un foncteur $c : e \to C$, où e désigne la catégorie finale, et la catégorie ${}_{c}\backslash C$ au sens précédent n'est autre que la tranche usuelle. Ainsi, les tranches ${}_{u}\backslash C$ sont des tranches généralisées au sens où on considère des tranches au-dessous d'un diagramme quelconque à valeur dans C et non pas seulement d'un objet de C.

Ce point de vue sur les tranches ne joue traditionnellement pas un rôle important en théorie des catégories, sans doute parce que les objets en jeu sont simples à décrire explicitement. Néanmoins, le joint et ses deux adjoints sont au cœur de la théorie des quasi-catégories (voir par exemple [**24**]) et sont un outil précieux pour obtenir la structure de catégorie de modèles de Joyal [**25**] sur les ensembles simpliciaux.

Le résultat principal de ce travail est la généralisation du formalisme du joint et des tranches à la catégorie $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ des ∞-catégories strictes. On définit un foncteur

$$\begin{aligned} \infty\text{-}\mathcal{C}at \times \infty\text{-}\mathcal{C}at &\to \infty\text{-}\mathcal{C}at \\ (A, B) &\mapsto A \star B \end{aligned}$$

qu'on appelle le *joint ∞-catégorique*. Ce foncteur est compatible au joint 1-catégorique au sens suivant : si A et B sont deux catégories vues comme des ∞-catégories, alors leur joint ∞-catégorique $A \star B$ est une 3-catégorie dont le tronqué 1-catégorique, obtenu en appliquant l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de $\mathcal{C}at$ dans $\infty\text{-}\mathcal{C}at$, est le joint 1-catégorique usuel. En effet, le joint ∞-catégorique $A \star B$ s'obtient à partir du joint 1-catégorique en ajoutant, pour tout objet a de A et toute flèche $g : b \to b'$ de B, une 2-flèche dans le triangle formé de g, $j_{b,a}$ et $j_{b',a}$, pour toute flèche $f : a \to a'$ de A et tout objet b de B, une 2-flèche dans le triangle formé de f, $j_{b,a}$ et $j_{b,a'}$ et, pour toute flèche de A et toute flèche de B, une 3-flèche dans le tétraèdre formé des triangles du type précédent, et en quotientant par les relations évidentes. Notre joint ∞-catégorique est par ailleurs compatible au joint des ensembles simpliciaux (voir par exemple [**24**, section 3]) au sens où, si X et Y sont deux ensembles simpliciaux et si c_∞

désigne l'adjoint à gauche du nerf de Street [**36**], on a un isomorphisme canonique de ∞-catégories $c_\infty(X \star Y) \simeq c_\infty(X) \star c_\infty(Y)$.

On montre que le joint ∞-catégorique définit une structure de catégorie monoïdale sur ∞-$\mathcal{C}at$ d'unité la ∞-catégorie vide et que cette structure est localement bifermée. Ainsi, pour toute ∞-catégorie A et toute ∞-catégorie B, les foncteurs

$$\begin{aligned}\infty\text{-}\mathcal{C}at &\to {}_{A\backslash}\infty\text{-}\mathcal{C}at \\ B &\mapsto (A \star B, \iota_1 : A \to A \star B)\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}\infty\text{-}\mathcal{C}at &\to {}_{B\backslash}\infty\text{-}\mathcal{C}at \\ A &\mapsto (A \star B, \iota_2 : B \to A \star B)\,,\end{aligned}$$

où

$$A \xrightarrow{\iota_1} A \star B \xleftarrow{\iota_2} B$$

désignent des ∞-foncteurs canoniques, admettent des adjoints à droite. On obtient ainsi des foncteurs

$$\begin{aligned}{}_{A\backslash}\infty\text{-}\mathcal{C}at &\to \infty\text{-}\mathcal{C}at \\ (C, u : A \to C) &\mapsto {}_{u\backslash}C\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}{}_{B\backslash}\infty\text{-}\mathcal{C}at &\to \infty\text{-}\mathcal{C}at \\ (C, v : B \to C) &\mapsto C \overset{\mathrm{co}}{/}_{v}\,.\end{aligned}$$

Le premier foncteur définit les *tranches ∞-catégoriques généralisées au-dessous*. Si c est un objet de C, on peut considérer c comme un ∞-foncteur $c : e \to C$, où e désigne la ∞-catégorie finale, et on obtient une tranche ${}_{c\backslash}C$ de C au-dessous de l'objet c. Dans ce cas particulier, on décrit explicitement la ∞-catégorie ${}_{c\backslash}C$ et on retrouve les formules connues décrivant les cônes n-catégoriques (voir [**30**] pour le cas, plus général, des cylindres).

Nous avons décidé de réserver la notation $C_{/v}$, ainsi que la terminologie « tranches au-dessus », à une variante de la ∞-catégorie $C \overset{\mathrm{co}}{/}_{v}$. La catégorie ∞-$\mathcal{C}at$ possède un automorphisme remarquable qui envoie une ∞-catégorie C sur la ∞-catégorie C° obtenue en renversant le sens des i-flèches de C pour tout $i > 0$. Le joint n'est pas compatible à cet automorphisme et on obtient un foncteur

$$\begin{aligned}\infty\text{-}\mathcal{C}at \times \infty\text{-}\mathcal{C}at &\to \infty\text{-}\mathcal{C}at \\ (A, B) \qquad &\mapsto (B^\circ \star A^\circ)^\circ\end{aligned}$$

qui définit une seconde structure de catégorie monoïdale sur la catégorie des ∞-catégories. Ce foncteur permet d'obtenir comme ci-dessus des foncteurs

$$\begin{aligned}{}_{A\backslash}\infty\text{-}\mathcal{C}at &\to \infty\text{-}\mathcal{C}at \\ (C, u : A \to C) &\mapsto {}_{u}\overset{\mathrm{co}}{\backslash}C\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}{}_{B\backslash}\infty\text{-}\mathcal{C}at &\to \infty\text{-}\mathcal{C}at \\ (C, v : B \to C) &\mapsto C_{/v}\,.\end{aligned}$$

C'est ce second foncteur qui définit les *tranches ∞-catégoriques généralisées au-dessus*.

Le choix de privilégier les ∞-catégories ${}_{u\backslash}C$ et $C_{/v}$ par rapport aux ∞-catégories ${}_{u}\overset{\mathrm{co}}{\backslash}C$ et $C \overset{\mathrm{co}}{/}_{v}$ est motivé par le fait que les premières admettent une description beaucoup plus simples que les dernières. Par ailleurs, on a des isomorphismes canoniques

$$C_{/v} \simeq ({}_{v^\circ\backslash}C^\circ)^\circ \quad \text{et} \quad {}_{u}\overset{\mathrm{co}}{\backslash}C \simeq (C^\circ \overset{\mathrm{co}}{/}_{u^\circ})^\circ.$$

Si A et B sont deux n-catégories strictes, pour un $n \geqslant 0$, leur joint est une $(2n+1)$-catégorie stricte. En tronquant cette $(2n+1)$-catégorie en dimension n

(c'est-à-dire en appliquant l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion), on obtient une n-catégorie $A \star_n B$ qu'on appelle leur joint n-catégorique. On montre qu'on définit ainsi une structure de catégorie monoïdale sur n-$\mathcal{C}at$, la catégorie des n-catégories strictes, et que cette structure est localement bifermée comme ci-dessus. Lorsque $n = 1$, on retrouve la structure de catégorie monoïdale définie par le joint 1-catégorique usuel.

Pour construire ce joint ∞-catégorique, on adopte une stratégie inspirée, d'une part, d'une esquisse de construction du produit tensoriel de Gray ∞-catégorique donnée par Street dans [**40**, section 9] et, d'autre part, d'idées de Steiner pour construire ce même produit tensoriel basées sur sa théorie des complexes dirigés augmentés [**32**].

La théorie de Steiner associe à tout complexe dirigé augmenté, c'est-à-dire à tout complexe de chaînes de groupes abéliens en degrés positifs augmenté et muni en chaque degré d'un sous-monoïde des chaînes, une ∞-catégorie stricte. Un des résultats importants de [**32**] donne des conditions suffisantes pour que la ∞-catégorie ainsi associée soit libre au sens des polygraphes. La théorie de Steiner permet ainsi de décrire en termes de complexes de chaînes une sous-catégorie pleine de ∞-$\mathcal{C}at$, que nous appellerons la catégorie des ∞-catégories de Steiner fortes, qui contient notamment la catégorie Θ de Joyal [**23**], les orientaux de Street [**36**] et les cubes n-catégoriques. (Une théorie alternative permettant de décrire ces ∞-catégories de manière combinatoire est la théorie des complexes de parité de Street [**37, 38**].)

Afin de construire le joint ∞-catégorique, on commence par décrire, en termes de produit tensoriel de complexes de chaînes, le joint de deux complexes dirigés augmentés, s'inspirant d'une construction analogue due à Street [**37**] dans le cadre des complexes de parité. On obtient alors une structure de catégorie monoïdale sur la catégorie des complexes dirigés augmentés. On montre que cette structure induit une structure de catégorie monoïdale sur la catégorie des ∞-catégories de Steiner fortes. Il s'agit ensuite d'étendre cette structure à la catégorie de toutes les ∞-catégories strictes. Pour cela, suivant la stratégie de Street pour définir le produit tensoriel de Gray [**40**, section 9], on utilise un théorème d'extension de structures de catégorie monoïdale à la Day [**19, 20**]. Notre structure de catégorie monoïdale n'étant pas bifermée mais seulement localement bifermée, les résultats de Day ne s'appliquent pas tels quels. On est donc conduit à généraliser un théorème de Day au cas localement bifermé. Enfin, la partie la plus délicate de la construction du joint ∞-catégorique est la vérification des hypothèses de ce théorème à la Day. Il s'agit essentiellement de construire à la main les tranches ${}_{u\backslash}C$ et $C\overset{\mathrm{co}}{/}_{v}$ dans le cas où les sources de u et v sont des ∞-catégories de Steiner fortes, et de vérifier que ces tranches ont les propriétés universelles attendues.

Dans un appendice, on construit le produit tensoriel de Gray ∞-catégorique en suivant une stratégie analogue. Rappelons que le produit tensoriel de Gray ∞-catégorique est une généralisation ∞-catégorique du produit tensoriel introduit par Gray dans [**22**] sur la catégorie des 2-catégories strictes. Ce produit définit une structure de catégorie monoïdale bifermée sur ∞-$\mathcal{C}at$. Le produit tensoriel de Gray ∞-catégorique a été construit pour la première fois par Al-Agl et Steiner [**1**], généralisant une construction analogue pour les ∞-groupoïdes due à Brown et Higgins [**12**]. Deux constructions alternatives sont données par Crans dans sa thèse [**18**]. Dans [**32**], Steiner propose une nouvelle construction qui a l'avantage d'être relativement explicite. Néanmoins, la preuve de [**32**] est incomplète. En effet, dans la preuve de son théorème 7.3, Steiner affirme qu'il est évident que son produit tensoriel commute aux limites inductives, sous-entendant que cette commutation est formelle, ce qui n'est pas le cas. Steiner nous a cependant affirmé savoir compléter cette preuve, esquissant un argument [**35**]. Dans l'appendice A, on propose une démonstration alternative en adoptant la stratégie qu'on a utilisé pour construire le joint. En particulier, on utilise de manière cruciale un théorème de Day et, comme dans le cas du joint, la partie la plus délicate du travail consiste à vérifier que les hypothèses du théorème de Day sont satisfaites.

On formule de très générales conjectures de fonctorialité du joint et des tranches. Pour cela, on introduit la notion de ∞-catégorie de Gray, catégorie enrichie dans la catégorie des ∞-catégories strictes munie du produit tensoriel de Gray. (On définit également au passage la notion de ∞-sesquicatégorie.) La ∞-catégorie de Gray paradigmatique est $\infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{oplax}}$ dont les objets sont les ∞-catégories strictes, les 1-flèches les ∞-foncteurs stricts, les 2-flèches les transformations oplax et les flèches supérieures les transformations oplax supérieures. De même, on introduit la notion de catégorie de Gray gauche, catégorie enrichie dans la catégorie des ∞-catégories strictes munie du produit tensoriel $(C, D) \mapsto D \otimes C$ obtenu en transposant celui de Gray. La ∞-catégorie de Gray gauche paradigmatique est $\infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{lax}}$ obtenue en utilisant cette fois les transformations lax. On conjecture l'existence de tranches pour les ∞-catégories de Gray et les ∞-catégories de Gray gauches au-dessus ou au-dessous d'un objet. En particulier, si C désigne une ∞-catégorie stricte, on disposerait de ∞-catégories de Gray

$$C \overset{\mathrm{co}}{\backslash} \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{oplax}} \quad \text{et} \quad \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{oplax}}/C$$

et de ∞-catégories de Gray gauches

$$C\backslash \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{lax}} \quad \text{et} \quad \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{lax}} \overset{\mathrm{co}}{/} C.$$

On conjecture que les foncteurs $\bullet \star C$ et $C \star \bullet$ proviennent de ∞-foncteurs de Gray et de Gray gauches (c'est-à-dire des foncteurs enrichis) respectivement

$$\begin{aligned} \bullet \star C &: \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{oplax}} \to C \overset{\mathrm{co}}{\backslash} \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{oplax}} \\ C \star \bullet &: \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{lax}} \quad\;\; \to C\backslash \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{lax}} \end{aligned}$$

et que l'association $(A, A \xrightarrow{u} C) \mapsto {}_u\backslash C$, selon qu'on la considère comme un foncteur en C ou en A, provient de ∞-foncteurs de Gray gauches et de Gray respectivement

$$A\backslash \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{lax}} \to \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{lax}}$$

$$(\infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{lax}} \overset{\mathrm{co}}{/} C)^{\circ} \to \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{oplax}},$$

où $^{\circ}$ est une dualité transformant une ∞-catégorie de Gray gauche en une ∞-catégorie de Gray (et réciproquement). Dans ce texte, on s'intéresse spécifiquement à la dernière conjecture, c'est-à-dire au ∞-foncteur de Gray $(\infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{lax}} \overset{\mathrm{co}}{/} C)^{\circ} \to \infty\text{-}\mathbb{C}\mathsf{at}_{\mathrm{oplax}}$, car