

# Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

**Numéro 173**  
**Nouvelle série**

**ON MOD  $p$  LOCAL-GLOBAL  
COMPATIBILITY FOR  $GL_n(\mathbb{Q}_p)$   
IN THE ORDINARY CASE**

**C. PARK & Z. QIAN**

**2 0 2 2**

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

---

### *Comité de rédaction*

Christine BACHOC  
Yann BUGEAUD  
François DAHMANI  
Béatrice de TILLIÈRE  
Clotilde FERMANIAN  
Wendy LOWEN

Laurent MANIVEL  
Julien MARCHÉ  
Kieran O'GRADY  
Emmanuel RUSS  
Eva VIEHMANN

Marc HERZLICH (dir.)

### *Diffusion*

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
commandes@smf.emath.fr

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

### *Tarifs*

*Vente au numéro* : 43 € (\$ 65)

*Abonnement électronique* : 113 € (\$ 170)

*Abonnement avec supplément papier* : 167 €, hors Europe : 197 € (\$ 296)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### *Secrétariat*

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
memoires@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2022

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-85629-945-6

doi : 10.24033/msmf.481

Directeur de la publication : Fabien DURAND

---

ON MOD  $p$  LOCAL-GLOBAL  
COMPATIBILITY FOR  $GL_n(\mathbb{Q}_p)$   
IN THE ORDINARY CASE

Chol Park  
Zicheng Qian

*C. Park*

Department of Mathematical Sciences, Ulsan National Institute of Science and Technology, Unist-gil 50, Ulsan 44919, Republic of Korea.

*E-mail* : cholpark@unist.ac.kr

*Z. Qian*

Department of Mathematics, University of Toronto, HU1012A, 215 Huron, Toronto, Ontario M5S 1A2, Canada.

*E-mail* : zqian@math.utoronto.ca

Soumis le 28 janvier 2018, révisé le 21 janvier 2020, accepté le 2 octobre 2020.

---

**2000 Mathematics Subject Classification.** – 11F80, 11F33.

**Key words and phrases.** –  $\text{mod } p$  local-global compatibility, Fontaine-Laffaille modules, strongly divisible modules, potentially crystalline representations, Jacobi sums,  $\text{mod } p$  reduction of Deligne-Lusztig representations.

**Mots clefs.** – Compatibilité local-global modulo  $p$ , modules de Fontaine-Laffaille, modules fortement divisibles, représentations potentiellement cristallines, sommes de Jacobi, réduction modulo  $p$  des représentations de Deligne-Lusztig.

---

# ON MOD $p$ LOCAL-GLOBAL COMPATIBILITY FOR $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ IN THE ORDINARY CASE

Chol Park, Zicheng Qian

**Abstract.** – Let  $p$  be a prime number,  $n > 2$  an integer, and  $F$  a CM field in which  $p$  splits completely. Assume that a continuous automorphic Galois representation  $\bar{r} : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$  is upper-triangular and satisfies certain genericity conditions at a place  $w$  above  $p$ , and that every subquotient of  $\bar{r}|_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/F_w)}$  of dimension  $> 2$  is Fontaine-Laffaille generic. In this paper, we show that the isomorphism class of  $\bar{r}|_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/F_w)}$  is determined by  $\mathrm{GL}_n(F_w)$ -action on a space of mod  $p$  algebraic automorphic forms cut out by the maximal ideal of a Hecke algebra associated to  $\bar{r}$ . In particular, we show that the wildly ramified part of  $\bar{r}|_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/F_w)}$  is determined by the action of Jacobi sum operators (seen as elements of  $\mathbf{F}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)]$ ) on this space.

## **Résumé (Sur la compatibilité local-global modulo $p$ pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ dans le cas ordinaire)**

Soient  $p$  un nombre premier,  $n > 2$  un entier, et  $F$  un corps à multiplication complexe dans lequel  $p$  est complètement décomposé. Supposons qu'une représentation galoisienne automorphe continue  $\bar{r} : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$  est triangulaire supérieure, Fontaine-Laffaille et suffisamment générique (dans un certain sens) en une place  $w$  au-dessus de  $p$ . On montre, en admettant un résultat d'élimination de poids de Serre prouvé dans [47], que la classe d'isomorphisme de  $\bar{r}|_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/F_w)}$  est déterminée par l'action de  $\mathrm{GL}_n(F_w)$  sur un espace de formes automorphes modulo  $p$  découpé par l'idéal maximal associée à  $\bar{r}$  dans une algèbre de Hecke. En particulier, on montre que la partie sauvagement ramifiée de  $\bar{r}|_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/F_w)}$  est déterminée par l'action de sommes de Jacobi (vus comme éléments de  $\mathbf{F}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)]$ ) sur cet espace.