Séminaires & Congrès
14, 2006, p. 341–356

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES ET MÉROMORPHES D'ÉQUATIONS AUX q-DIFFÉRENCES

par

Changgui Zhang

Résumé. — Nous établissons le résultat suivant : étant donnée une équation aux q-différences linéaire et à coefficients analytiques à l'origine du plan complexe, si toutes les pentes de son polygone de Newton sont entières, alors il existe une solution analytique sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ privé de 0 et d'une q-spirale. Cette spirale qui contient tous les pôles de la solution proches de 0 peut être fixée à l'avance de façon générique.

Nous commentons, en outre, le cas des équations non-linéaires pour lesquelles une extension en termes de θ-transséries paraît incontournable.

***Abstract* (Asymptotic and meromorphic solutions of q-difference equations).** — We prove the following result: given a linear analytic q-difference equation at the origin of the complex plane, if all slopes of its Newton polygon are integers, then, there exists an analytic solution in a neighbourhood of 0 in $\mathbb{C}$ punctured at the origin and at a q-spiral. Such a spiral which contains all poles of this solution near 0 can be chosen a priori and generically.

A discussion of the non linear cases where an extension involving θ-transseries seems necessary is also provided.

L'étude analytique des équations fonctionnelles aux q-différences est relativement récente. Dans [**3**], Birkhoff regardait le problème de Riemann généralisé pour trois types d'équations fonctionnelles : différentielles, aux différences finies et aux q-différences ; dans cette même ligne, Trjitzinsky [**11**] a pour la première fois mis au point une théorie analytique pour les équations aux q-différences linéaires, dans laquelle on établit l'existence d'une solution analytique asymptotique à une solution formelle donnée. Comme la plupart de ses contemporains, Trjitzinsky se servait de la théorie des développements asymptotiques fondée par Poincaré. De notre côté, inspirés par des travaux de recherches développés dans les années 80 et 90 du XX-ième siècle en théorie analytique des équations différentielles, nous travaillons depuis

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 30E05, 30E99, 33D10, 39B22, 40G10.
Mots clefs. — Equation aux q-différences, sommabilité, fonction thêta.

quelques années pour tenter d'obtenir une théorie asymptotique dite q-*Gevrey* pour les équations aux q-différences linéaires ou non linéaires.

Avant d'aborder le contenu de ce travail, faisons quelques commentaires sur les équations aux q-différences en comparaison avec les équations différentielles. Dans tout ce qui suit, q désignera un nombre complexe tel que $|q| > 1$, auquel on associe l'opérateur fonctionnel σ_q défini par la relation $\sigma_q f(x) = f(qx)$.

Depuis Maillet (*cf*, par exemple, [**13**]), on sait que toute série entière satisfaisant une équation différentielle à coefficients analytiques est Gevrey, c'est-à-dire, ses coefficients a_n sont bornés par une suite du type $(CA^n(n!)^s)_n$, où C, $A > 0$ et $s \geq 0$ sont des constantes indépendantes de n. Dans le cas des équations aux q-différences, les solutions séries entières sont qualifiées de q-Gevrey : leurs coefficients sont contrôlés par les suites du type $(CA^n|q|^{n^2 s/2})$; *cf* [**2**] pour les cas linéaires, [**13**] pour les cas non linéaires. Cette analogie peut être comprise par les relations

$$\delta^m x^n = n^m x^n, \qquad \sigma_q^m x^n = q^{mn} x^n,$$

dans lesquelles l'on note $\delta = x\frac{d}{dx}$, n et m étant des entiers positifs ou nuls. Partant de ces analogies Gevrey formelles, nous avons étudié, dans [**14**] puis [**5**], une version q-analogue de la sommation exponentielle de Borel-Laplace, en remplaçant la fonction exponentielle par son q-analogue $x \mapsto e_q(x) = q^{\frac{1}{2}(\frac{\log x}{\log q} - \frac{1}{2})^2}$, vu les relations

$$\delta e^x = x e^x, \qquad \sigma_q e_q(x) = x e_q(x).$$

Ceci fournit une théorie asymptotique q-Gevrey pour les équations aux q-différences **linéaires**.

Deux points sont à souligner. Premièrement, le choix de la fonction q-exponentielle e_q n'est pas unique, et la fonction theta de Jacobi donnée par

$$\theta_q(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{-n(n+1)/2} x^n,$$

également solution de $\sigma_q y = xy$, présente l'avantage d'être analytique sur tout le plan des complexes x non nuls ; ce nouveau choix de fonction q-exponentielle a donné lieu à une notion de développement asymptotique de caractère algébrique [**15**], [**8**]. Deuxièmement, le produit de fonctions solutions d'équations aux q-différences présente une nature *peu stable vis-à-vis de l'indice de sommabilité*, comme l'illustre la comparaison ci-dessous entre différentielles et q-différences :

$$\frac{\delta(fg)}{fg} = \frac{\delta f}{f} + \frac{\delta g}{g}, \qquad \frac{\sigma_q(fg)}{fg} = \frac{\sigma_q f}{f} \times \frac{\sigma_q g}{g} \ ;$$

de ce fait on pourrait s'attendre à des difficultés particulières à surmonter pour bâtir une algèbre de fonctions asymptotiques q-Gevrey ...

Le présent article a un double objectif. Il s'agit d'abord d'étendre des résultats de [**15**] et [**8**] à toute équation aux q-différences linéaire ayant un polygone de Newton à pentes entières. La notion de développement asymptotique suivant une spirale, introduite dans nos travaux précédents, permet d'incarner toute solution formelle en une solution analytique à pôles prescrits lorsque l'équation étudiée admet une seule pente égale à un. Quand une équation possède plusieurs pentes, elle se factorise suivant ses pentes et nous verrons qu'elle a des solutions asymptotiques à un nombre fini d'échelles, du type

$$f_0 + \frac{f_1}{\Theta_1} + \cdots + \frac{f_n}{\Theta_n},$$

où les f_j sont des fonctions asymptotiques suivant des spirales et où les Θ_j sont des q-exponentielles exprimées à l'aide de θ. Notre construction peut être schématisée par le diagramme suivant :

« solution formelle série entière $\Longrightarrow$ quasi-solution $\Longrightarrow$ vraie solution » ;

noter également que les solutions correspondantes sont méromorphes dans un voisinage épointé en l'origine du plan complexe.

Un autre objectif du présent travail est de tenter de trouver un cadre général de fonctions asymptotiques qui permettrait de traiter aussi le cas des équations aux q-différences non linéaires. La construction à multi-échelles mentionnée plus haut suggérerait une écriture en transséries des solutions asymptotiques dans le cas non linéaire. A ce propos nous développerons à la fin de notre article quelques observations sur un exemple.

Les résultats obtenus dans cet article rejoignent la méthode algébrique de J. Sauloy [**10**] pour la résolution des équations aux q-différences linéaires. En effet, comme dans la théorie des fonctions elliptiques, la donnée du diviseur d'une solution permet généralement d'identifier la solution elle-même. Cette idée sera exploitée dans un travail en collaboration avec J.-P. Ramis et J. Sauloy sur la classification analytique des équations aux q-différences.

1. Notations et terminologies préliminaires

Etant donné λ un nombre complexe non nul, appelons *q-spirale passant par λ* l'ensemble discret $[\lambda]$ défini comme étant l'orbite de λ sous l'action de l'opérateur σ_q dans le plan complexe privé de zéro ; on a $[\lambda] = \lambda q^{\mathbb{Z}}$. Puisque $|q| > 1$, toute q-spirale tend à la fois vers zéro et l'infini.

Soit x un nombre complexe non nul ; définissons *la q-distance de x à la spirale* $[\lambda]$, notée $d_q(x; [\lambda])$, par la formule

$$d_q(x; [\lambda]) = \inf_{\xi \in [\lambda]} \left|1 - \frac{x}{\xi}\right|.$$

L'application $(\lambda, x) \mapsto d_q(x; [\lambda])$ est clairement q-invariante en x et en λ ; en outre, elle est quasi-symétrique au sens suivant : il existe des constantes C, D strictement positives, dépendant uniquement de q, telles que

$$C d_q(x; [\lambda]) < d_q(\lambda; [x]) < D d_q(x; [\lambda]).$$

Soit θ la fonction thêta de Jacobi définie dans tout le plan complexe sauf en zéro par

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{-n(n+1)/2} x^n = \prod_{n\in\mathbb{N}} (1-q^{-1-n})(1+xq^{-1-n})(1+q^{-n}/x),$$

où le triple produit permet de voir que θ s'annule sur la spirale $[-1]$. Pour simplifier, on note $\theta_\lambda(x) = \theta(-\frac{x}{\lambda})$ pour tous complexes non nuls λ et x. Les trois conditions sont équivalentes : (1) $\theta_\lambda(x) = 0$; (2) $x \in [\lambda]$ ou $\lambda \in [x]$; (3) $d_q(x;[\lambda]) = 0$.

Au voisinage de l'origine, la fonction exponenetielle $e^{\frac{1}{x}}$ a des comportements asymptotiques très constratés dans les demi-plans à gauche et à droite. Dans une direction analogue on a le résultat suivant (*cf* [**15**]), où l'on distingue essentiellement la spirale des zéros $[\lambda]$ et le reste du plan !

Lemme 1.1. — *Il existe des constantes C_1, C_2 strictement positives, toutes dépendant uniquement de q, telles que pour tout couple de nombres complexes non nuls (λ, x), on ait :*

$$C_1 d_q(x;[\lambda])\vartheta(|\frac{x}{\lambda}|) \leq |\theta_\lambda(x)| \leq C_2 d_q(x;[\lambda])\vartheta(|\frac{x}{\lambda}|),$$

où ϑ est la fonction thêta obtenue en remplaçant q par son module $|q|$ dans la définition de θ.

Remarque 1.2. — Du fait que $\theta(x)$ et $e_q(x)(= q^{\frac{1}{2}(\frac{\log x}{\log q}-\frac{1}{2})^2})$ vérifient la même équation fonctionnelle $\sigma_q y = xy$, leur rapport est une q-constante ; de là on pourra formuler la croissance de θ ou plutôt celle de ϑ en termes de $e_{|q|}$: il existe $C > 0$ et $D > 0$ vérifiant

$$C\vartheta(|x|) < e_{|q|}(|x|) < D\vartheta(|x|)$$

pour tout x non nul.

2. Développement asymptotique suivant une spirale

Soient λ un nombre complexe non nul et ϵ, R des réels strictement positifs. Posons

$$V([\lambda];R,\epsilon) = \{x \in \mathbb{C} \ : 0 < |x| < R, d_q(x;[\lambda]) > \epsilon\} ;$$

c'est un disque ouvert, épointé en zéro et dans lequel est supprimée une série de disques centrés sur la spirale $[\lambda]$. Puisque $d_q(x;[\lambda]) < 1$ pour tous les x, λ non nuls, on a $V([\lambda];R,\epsilon) = \varnothing$ si $\epsilon \geq 1$.

Soit

$$V([\lambda];R) = \cup_{\epsilon>0} V([\lambda];R,\epsilon).$$

On dira que $V([\lambda];R)$ est un *disque épointé sur* $[\lambda]$ *en zéro.*

Par $\mathbb{B}^{[\lambda]}$ nous désignons l'ensemble des germes de fonctions analytiques dans un disque épointé sur $[\lambda]$ en zéro, $V = V([\lambda];R)$, telles que, quels que soient $\epsilon > 0$ et $r \in]0,R[$, on ait l'encadrement suivant :

$$\sup_{x\in V([\lambda];r,\epsilon)} |f(x)| < \infty.$$

Définition 2.1. — *(*[**15**], [**8**]*)* Soit λ un nombre complexe non nul et soit $f \in \mathbb{B}^{[\lambda]}$. Soit $\hat{f} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ une série entière. On note $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ et on dira que f admet $\hat{f}$ pour *développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un en zéro suivant la spirale* $[\lambda]$ s'il existe des constantes strictement positives R, C, A telles que, pour tous $r \in]0, R[$, $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\sup_{x\in V([\lambda];r,\epsilon)} |x|^{-N} \Big| f(x) - \sum_{0\le n<N} a_n x^n \Big| < \frac{C}{\epsilon} A^N |q|^{N^2/2}.$$

Rappelons qu'une série entière $\hat{f} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est dite *q-Gevrey d'ordre un* si la suite numérique $(|a_n|^{-1/n}|q|^{-n/2})_{n\ge1}$ est une suite bornée ou, de façon équivalente, si la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n q^{-n^2/2} x^n$ a un rayon de convergence non nul. Soit $\mathbb{C}[\![x]\!]_{q;1} \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$ l'anneau des séries entières q-Gevrey d'ordre un. Si $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$, son développement asymptotique est unique et appartient à $\mathbb{C}[\![x]\!]_{q;1}$.

Le résultat suivant a été annoncé dans [**8**].

Théorème 2.2. — *L'application de Taylor $T : \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]} \to \mathbb{C}[\![x]\!]_{q;1}$ qui associe à chaque $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ son développement $\hat{f}$ est un homomorphisme surjectif d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.*

En outre, son noyau peut être caractérisé de la façon suivante :

$$\ker T = \Big\{ \frac{h}{\theta_\lambda} \ : h \in \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}] \Big\},$$

où $\mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ désigne le corps des germes de fonctions méromorphes à l'origine du plan complexe.

Esquisse de démonstration.. — La surjectivité de T s'obtient par un mécanisme q-Borel-Laplace. En effet, soit $\hat{f} = \sum_{n\ge0} a_n x^n$ une série q-Gevrey d'ordre un ; soit ϕ sa transformée de q-Borel formelle définie par

$$\phi = \sum_{n\ge0} a_n q^{-n(n-1)/2} x^n,$$

qui représente une fonction analytique au voisinage de $x = 0$, soit $|x| < R$. Choisissons alors un entier n_0 tel que $|\lambda q^{n_0}| < R$, et définissons ensuite

$$f = \sum_{n\le n_0} \frac{\phi(\lambda q^n)}{\theta(-\frac{x}{\lambda q^n})}.$$

On a $f \in \mathbb{B}^{[\lambda]}$; on peut vérifier que $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ et que $\hat{f}$ est son développement asymptotique.

Soit $f \in \ker T$ et notons $F = f\theta_\lambda$. Du fait que θ_λ s'annule sur la spirale $[\lambda]$, il vient que F peut se prolonger en une fonction analytique dans un disque épointé $0 < |x| < R$. Pour obtenir que F est méromorphe en $x = 0$, on vérifie qu'elle admet une croissance modérée, c'est-à-dire au plus polynomiale, lorsque x s'approche de