ÉQUILINÉARITÉ
ET COURBURE SCALAIRE CONFORME

Philippe DELANOË
Chargé de recherches au C.N.R.S. et membre du réseau européen GADGET

Université de Nice-Sophia Antipolis
Mathématiques, Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2 (France)
delphi@math.unice.fr

Abstract. On a complete noncompact Riemannian manifold (M, g), I show that the solvability of semi-linear equations like $\Delta u = f(x)F(u)$ is equivalent to that of the linear equation $\Delta v = f(x)$, under some assumptions on u, v, f, F. I call this phenomenon "equilinearity". When M has dimension $n > 2$ and g is scalar-flat non-parabolic, I derive from this a characterization of the set $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ of functions which are scalar curvature of metrics quasi-isometric to g. In the particular case of euclidean space, my result improves [13] and, combined with Liouville's theorem, it explains the *ad hoc* condition of partial decay at infinity of [13]. Last, I discuss a list of sign incompatibilities between functions in $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$, deduced from well-known properties of the laplacian under three natural geometric assumptions.

Résumé. Sur une variété riemannienne complète non compacte (M, g), je montre que la possibilité de résoudre des équations semi-linéaires de la forme $\Delta u = f(x)F(u)$ équivaut à celle de résoudre l'équation linéaire $\Delta v = f(x)$, moyennant certaines hypothèses sur u et v, f et F. J'appelle ce phénomène "équilinéarité". Lorsque M est de dimension $n > 2$ et g scalaire-plate, non-parabolique, j'en déduis une caractérisation de l'ensemble $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$ des fonctions qui sont courbures scalaires de métriques quasi-isométriques à g. Dans le cas particulier de l'espace euclidien, mon résultat améliore [13] et, combiné au théorème de Liouville, il en explique la condition *ad hoc* d'évanouissement partiel à l'infini. Je discute en annexe une liste d'incompatibilités de signe entre fonctions de $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$, déduites de propriétés connues du laplacien sous trois hypothèses géométriques naturelles.

M.S.C. Subject Classification Index : 53C21, 35J60, 35B99.
Contrat GADGET SC1-0105-C

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION

Sur toute variété riemannienne (M, g) de dimension $n > 2$ (sauf précision tous nos objets seront lisses i.e. de classe C^∞), à chaque fonction positive u est associée la métrique conforme

$$g_u = u^p g \ , \ p = \frac{4}{n-2} \ ,$$

de courbure scalaire

$$s(g_u) = u^{-p-1}[c_n \Delta u + s(g)u]$$

où $c_n = 4(n-1)/(n-2)$ et Δ désigne le laplacien de g (avec la convention de signe $\Delta = -d^2/dx^2$ sur $\mathbb{R}$). J. L. Kazdan et F. Warner se sont interrogés [11] sur *l'image* $\mathcal{S}$ de l'application $u \mapsto s(g_u)$. Supposant désormais M non compacte et g complète, on imposera à g_u d'être *équivalente* à g (l'ensemble des métriques conformes équivalentes à g s'appelle souvent *classe quasi-isométrique* de g) ; on notera $\underline{\overline{\mathcal{S}}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ correspondant. Mais on devra parfois considérer le sous-ensemble $\overline{\mathcal{S}}$ (resp. $\underline{\mathcal{S}}$) pour lequel u n'est que bornée (resp. uniformément positive, g_u est alors complète). Bien entendu : $\underline{\overline{\mathcal{S}}} = \overline{\mathcal{S}} \cap \underline{\mathcal{S}}$.

Mon but dans cet exposé est d'obtenir des informations sur $\mathcal{S}$ (et sur les autres sous-ensembles) à partir de résultats ou de techniques connus concernant le laplacien de (M, g). J'étudierai principalement (section 3) le cas où $s(g) = 0$ quand (M, g) est non-parabolique par la méthode des solutions supérieure et inférieure [9] (p. 313), mais je donnerai aussi (en annexe) une liste commentée d'incompatibilités de signe entre fonctions de $\mathcal{S}$ ou de ses sous-ensembles, déduites de propriétés connues [4] [10] [14] du laplacien tour à tour sous trois hypothèses coutumières. Pour caractériser $\underline{\overline{\mathcal{S}}}$ quand $s(g) = 0$, l'idée directrice est la suivante : chercher si 0 appartient à $\underline{\overline{\mathcal{S}}}$ se traduit par un problème *linéaire*, donc inversement partir d'une métrique scalaire-plate pour caractériser les fonctions de $\underline{\overline{\mathcal{S}}}$ doit équivaloir à un problème linéaire sur le laplacien. Cette idée se révèle fructueuse non seulement pour l'équation géométrique $f \in \underline{\overline{\mathcal{S}}}$, mais encore pour des équations non-linéaires plus générales traitées préalablement dans la section 2. Il s'agit d'équations semi-linéaires de la forme $\Delta u = f(x)F(u)$ dont je montre *l'équivalence*, sous certaines hypothèses, avec l'équation linéaire $\Delta v = f$. Je qualifie donc d'*équilinéaire* une telle famille de problèmes non-linéaires. Si le théorème de Liouville fort (celui bien connu sur $\mathbb{R}^2$) s'applique à (M, g), les résultats sont triviaux, car nécessairement limités à $f \equiv 0$; c'est pourquoi (M, g) est supposée *non-parabolique* dans les sections 2 et 3.

Dans la suite de l'introduction, je vais présenter l'apport *géométrique* principal de cet article, objet de la section 3.

Le seul critère (suffisant) connu d'appartenance à $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$, lorsque g est scalaire-plate, est celui de W.-M. Ni [13] sur l'espace euclidien ; rappelons-en l'énoncé.

Théorème [13]. — *Si f est une fonction réelle bornée localement höldérienne sur $\mathbb{R}^n$ et s'il existe un réel $\epsilon > 0$ et un sous-espace vectoriel de dimension $m > 2$ (soit $|\pi|$ la norme de la projection orthogonale sur ce sous-espace) tels que $|\pi|^{2+\varepsilon} f$ soit bornée, alors f appartient à $\overline{\underline{\mathcal{S}}}$.*

Cette condition d'évanouissement partiel de f à l'infini relativement à un sous-espace de dimension $m > 2$ est d'un type nouveau dans la littérature. Dans [13], elle permet de construire des solutions supérieure et inférieure, fonctions seulement de π, de l'équation $s(g_u) = f$. J'ai remarqué dans [5] qu'elle est aussi garante de la convergence de l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ exprimant le *potentiel newtonien* de $|f|$. Au détour de cette remarque, l'analyste distinguera la possibilité d'une théorie linéaire elliptique à évanouissement partiel, objet en effet de [6] (section 2). Au début de mon exposé oral, j'ai établi un nouveau principe du maximum, propre à cette théorie (voir [6], p. 17-19 et aussi p. 47). Ici, comme je l'ai fait dans le corps de mon exposé oral, je ne vais plus spécifier le comportement qualitatif de f à l'infini, je ne retiendrai que la convergence de son potentiel newtonien et l'exprimerai sous forme *différentielle*, en requérant l'existence d'une solution *bornée* de l'équation linéaire

$$\Delta u = |f| \ .$$

Ainsi formulée, cette condition a été récemment utilisée dans [3] (Theorem 1) pour résoudre une équation elliptique sous-linéaire dans $\mathbb{R}^n$; pour nous, elle présente le grand avantage de conserver un sens sur toute variété riemannienne complète non compacte, où elle n'a d'intérêt que si la variété est non-parabolique. Elle conduit à une extension quasi-optimale du théorème de Ni à savoir :

Théorème (cf. section 3). — *Sur (M,g) complète non-compacte scalaire-plate, la condition précédente sur f implique $f \in \underline{\overline{S}}$. Elle est nécessaire pour cela dès que $f \geq 0$ (resp. $f \leq 0$).*

En outre, dans le cas particulier de $\mathbb{R}^n$, ce théorème combiné au théorème de Liouville, démontre (cf. Corollaire 2′) la **nécessité** de l'hypothèse $m > 2$ faite par Ni (sur la dimension du sous-espace), indépendamment de toute hypothèse de décroissance sur $|f|$ à l'infini ! Un résultat analogue vaut d'ailleurs pour des équations semi-linéaires plus générales sur $\mathbb{R}^n$ (cf. Corollaire 2).

2. ÉQUILINÉARITÉ

Dans cette section je vais mettre en évidence une classe de problèmes non-linéaires qui possèdent la propriété d'être simultanément solubles ou insolubles, suivant qu'un problème *linéaire*, indépendant de la non-linéarité particulière choisie dans la classe, est ou non soluble lui-même. Je qualifierai d'*équilinéaire* une telle classe.

Soit (M,g) une variété riemannienne complète non-compacte de dimension finie. Elle est dite *non-parabolique* si son laplacien Δ admet un noyau de Green symétrique positif. C'est une propriété invariante par changement de métriques équivalentes [8]. Elle équivaut à la négation du théorème de Liouville i.e. à l'existence sur (M,g) de fonctions surharmoniques positives non-constantes, comme il ressort d'ailleurs aisément de la Remarque 1 de [12] (p. 1137). Nous aurons besoin de telles fonctions dans cette section et la suivante, c'est pourquoi nous y supposerons (M,g) *non-parabolique.*

Soit F une fonction réelle localement höldérienne définie sur $]0,\infty[$ et f une fonction réelle localement höldérienne sur M. Considérons les couples (λ,u) formés d'un réel positif λ et d'une fonction positive u qui vérifient (au sens classique) l'équation

$$\Delta u = \lambda f F(u) \ . \tag{1}$$