Sur certains modules gradués associés aux produits symétriques

Michel BRION

Résumé

On étudie certains anneaux et modules gradués qui apparaissent en géométrie algébrique (produits symétriques) et en théorie des représentations (pléthysme). Comme applications, on obtient une description des puissances de Schur des $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$-modules simples ; une action de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ dans la représentation régulière du groupe symétrique, qui raffine la graduation bien connue de cette représentation ; et enfin, une confirmation partielle d'une conjecture de Foulkes.

Abstract

We study certain graded modules and rings which appear in algebraic geometry (symmetric products) and in representation theory (plethysm). As applications we obtain a description of Schur powers of simple $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$-modules; an action of $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ in the regular representation of the symmetric group refining the well-known grading of this representation; and lastly, a partial confirmation of a conjecture by Foulkes.

Introduction

L'objet de cet article est la construction et l'étude de certains anneaux et modules gradués, qui apparaissent en géométrie algébrique (produits symétriques) et en théorie des représentations (pléthysme). Comme applications, on obtient des relations inattendues entre représentations de $\mathrm{GL}(2)$ et du groupe symétrique, ainsi qu'une confirmation partielle d'une conjecture de Foulkes.

Plus précisément, fixons un corps de base k algébriquement clos et de caractéristique nulle. Considérons une k-algèbre associative, commutative, graduée, de type fini

$$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n.$$

AMS 1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*): 20G05, 14L30, 20C30

Soit m un entier positif ; on munit l'espace

$$B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^m R_n$$

d'une structure d'algèbre graduée de type fini, où S^m désigne la puissance symétrique m-ième. Soit λ une partition de m, et soit S^λ le foncteur de Schur associé ; on munit

$$B(\lambda) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^\lambda R_n$$

d'une structure de B-module gradué de type fini. Plus généralement, il en est de même de

$$B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r)) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S^{\lambda(1)} R_{n+a(1)} \otimes \cdots \otimes S^{\lambda(r)} R_{n+a(r)}$$

où $\lambda(1),\ldots,\lambda(r)$ sont des partitions de $m(1),\ldots,m(r)$ avec $m(1) + \cdots + m(r) = m$, et où $a(1),\ldots,a(r)$ sont des entiers.

Les B-modules $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ s'interprètent comme des modules de covariants (voir 1.1 et 1.2), ou en termes de produits symétriques de la variété projective associée à R (voir 1.4 et 1.5). En ce qui concerne la propriété de Cohen-Macaulay pour ces modules, on démontre le résultat suivant :

Théorème (1.4) — *Si les singularités de* Spec(R) *sont rationnelles, alors chaque B-module $B(\lambda)$ est de Cohen-Macaulay. De plus, chaque $B(\lambda(1), a(1); \ldots ; \lambda(r), a(r))$ est de Cohen-Macaulay hors de l'idéal maximal homogène de B.*

Dans la seconde partie de ce travail, on se restreint au cas où R est l'algèbre symétrique d'un k-espace vectoriel V de dimension 2. Les $B(\lambda)$ sont alors munis d'une action du groupe $\mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}(2, k)$. Il se trouve que l'algèbre B est isomorphe à l'algèbre symétrique de $S^m V$; le théorème ci-dessus entraîne alors que chaque B-module $B(\lambda)$ est libre. Ce résultat a été obtenu indépendamment par J. Weyman et A. Zelevinsky, voir [W-Z]. On démontre ici le résultat suivant.

Théorème (2.4, 2.6) — *Soit V un espace vectoriel de dimension 2 ; soit λ une partition de m en r parts. Il existe alors un $\mathrm{GL}(V)$-module gradué $M(\lambda)$ tel que :*

$$S^\lambda(S^n V) = \bigoplus_{p=0}^{n} M(\lambda)_p \otimes S^m(S^{n-p} V)$$

pour tout entier $n \geq 0$. De plus :

1. *$M(\lambda)_p$ est nul si $p < r - 1$ ou si $p > m - \lambda_1$ (où λ_1 désigne la plus grande part de λ), et $M(\lambda)_{r-1} \simeq S^\lambda(S^{r-1} V)$.*

2. *Le dual de* $M(\lambda)_p$ *est isomorphe à* $M(\lambda')_{m-p-1} \otimes (\wedge^2 V)^{-m(m-1)/2}$ *où* λ' *désigne la partition conjuguée de* λ.

3. *La dimension de* $M(\lambda)$ *est la dimension de la représentation irréductible du groupe symétrique* S_m *associée à* λ.

Notons $[\lambda]$ cette représentation de S_m ; la construction précédente munit $[\lambda]$ d'une action de $\mathrm{GL}(2,k)$. D'autre part, $[\lambda]$ est munie d'une graduation (en effet, la représentation régulière de S_m se réalise dans le quotient de l'algèbre des polynômes en m variables, par l'idéal engendré par les polynômes symétriques élémentaires, et ce quotient a une graduation naturelle). On montre en 2.4 que cette graduation s'obtient à partir de l'action de $\mathrm{GL}(2,k)$, en considérant les espaces propres des matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right)$.

Le calcul des $M(\lambda)$ à partir de leur définition étant difficile, on obtient en 2.7 et 2.9 des relations de récurrence pour ces modules ; les premières valeurs des $M(\lambda)$ sont données en 2.8. On a ainsi une description assez complète des modules $B(\lambda)$ sur l'algèbre symétrique de $S^m V$.

Quant aux $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$, ils sont localement libres hors de l'origine, et définissent donc des fibrés vectoriels $\mathrm{GL}(V)$-linéarisés sur l'espace projectif $\mathbb{P}(S^m V^*)$ de dimension m. L'ensemble de ces fibrés est stable par passage au dual (voir 2.2 pour un énoncé plus précis) ; parmi eux se trouvent les fibrés de formes différentielles, ainsi que des fibrés de rang m construits par Schwarzenberger (voir 2.6). On obtient en 2.3 une caractérisation des B-modules $B(\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r))$ qui sont libres, c'est-à-dire qui définissent un fibré vectoriel scindé. Mais dans le cas général, la structure de ces modules reste mystérieuse.

La troisième partie de cet article est consacrée à une conjecture de H. O. Foulkes, précisée par R. Howe. Ce dernier a construit, pour tout espace vectoriel V de dimension finie et pour tous entiers positifs m et n, une application $\mathrm{GL}(V)$-équivariante

$$h_{m,n} : S^n(S^m V) \to S^m(S^n V).$$

La conjecture affirme que $h_{m,n}$ est injective pour $n \leq m$ et surjective pour $n \geq m$. On obtient ici un résultat partiel, mais effectif :

Théorème (3.3) — *Soit* V *un espace vectoriel de dimension* d *; notons* N *le plus petit entier tel que* $dN \geq \binom{m+d-1}{d-1}$. *Alors l'application* $h_{m,n}$ *est surjective pour* $n \geq (m-1)(d-1)(mN+m-N)$.

La surjectivité de $h_{m,n}$ pour n assez grand était déjà connue (voir [Br1] 1.3), mais sans borne effective sur n ; on la déduit du fait que le m-ième produit symétrique de $\mathbb{P}(V^*)$ s'identifie à la sous-variété de $\mathbb{P}(S^m V^*)$ formée des classes des produits de

m formes linéaires sur V. On renvoie à [Man] et à [Br1] pour d'autres applications des produits symétriques au problème du pléthysme.

Ce travail a été commencé en préparant un exposé à l'université de Chicago, en janvier 1995. Je remercie cette université pour son hospitalité, ainsi que William Fulton, Anthony Iarrobino et Laurent Manivel pour des discussions utiles. Enfin, je remercie tout particulièrement Jerzy Weyman et Andrei Zelevinsky pour m'avoir communiqué leurs résultats (voir [W-Z]) ; ils ont obtenu indépendamment une version du deuxième théorème ci-dessus, ainsi que l'approche géométrique de la conjecture de Foulkes-Howe, suivie dans [Br1] et dans la troisième partie de cet article.

Notations

On rassemble quelques notations et résultats sur les partitions, les représentations du groupe symétrique, et les représentations polynomiales du groupe linéaire ; pour plus de détails, on renvoie à [J-K] et à [Mac].

Une *partition* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ est une suite décroissante finie d'entiers positifs : les *parts* de λ. La somme des parts de λ est notée $|\lambda|$; c'est le *poids* de λ. Si $|\lambda| = m$, on dit que λ est une partition de m et on note $\lambda \vdash m$.

Le *diagramme* de la partition λ est l'ensemble des couples d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j \leq \lambda_i$. Les longueurs des lignes du diagramme de λ constituent les parts de λ, tandis que les longueurs des colonnes sont les parts de la partition *conjuguée*, notée λ'. Par exemple, la conjuguée de (m) est $(1, \dots, 1)$ (m fois), notée (1^m).

On note S_m le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$. Toute partition λ de m définit deux sous-groupes de S_m, à savoir $S_\lambda := S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots$ et $S_{\lambda'} = S_{\lambda'_1} \times S_{\lambda'_2} \times \cdots$. Notons 1 (resp. sgn) la représentation triviale (resp. signature) du groupe S_m. Les représentations induites $\mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_m}(1 \otimes 1 \otimes \cdots)$ et $\mathrm{Ind}_{S_{\lambda'}}^{S_m}(\mathrm{sgn} \otimes \mathrm{sgn} \otimes \cdots)$ ont une unique représentation irréductible en commun ; on la note $[\lambda]$. De plus, toute représentation irréductible de S_m est isomorphe à $[\lambda]$ pour une unique partition λ de m. On a ainsi : $[m] = 1$ et $[1^m] = \mathrm{sgn}$. La représentation duale de $[\lambda]$ est donnée par $[\lambda]^* = [\lambda'] \otimes [1^m]$.

Soit V un k-espace vectoriel. Le groupe S_m opère dans la m-ième puissance tensorielle $V^{\otimes m}$ par permutation des copies de V. Pour toute partition λ de m, on désigne par $S^\lambda V$ l'espace des applications S_m-équivariantes de $[\lambda]$ dans $V^{\otimes m}$:

$$S^\lambda V = \mathrm{Hom}^{S_m}([\lambda], V^{\otimes m}).$$

Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ opère dans $V^{\otimes m}$ en commutant à l'action de S_m ; il opère donc dans $S^\lambda V$. Si la dimension de V est finie, alors chaque $S^\lambda V$ est un $\mathrm{GL}(V)$-module polynomial simple, et ce module est nul si et seulement si $\lambda'_1 > \dim(V)$. Tout

GL(V)-module polynomial simple est isomorphe à $S^\lambda V$ pour une unique partition λ, avec $\lambda'_1 \leq \dim(V)$. On a par exemple $S^{(m)}V = S^m V$ (la m-ième puissance symétrique de V) et $S^{(1^m)}V = \wedge^m V$ (la m-ième puissance extérieure de V). La construction de $S^\lambda V$ définit le *foncteur de Schur* S^λ.

1 Construction d'algèbres et de modules gradués

1.1 Le groupe Γ_m et ses représentations

On note T_m l'ensemble des $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in (k^*)^m$ tels que $x_1 x_2 \cdots x_m = 1$. C'est un sous-groupe fermé de $(k^*)^m$, isomorphe à $(k^*)^{m-1}$. L'action de S_m dans $(k^*)^m$ par permutation des indices, laisse stable T_m. On note Γ_m le produit semi-direct de T_m par S_m ; c'est un groupe algébrique réductif.

Soient $\lambda(1), \ldots, \lambda(r)$ des partitions de poids respectifs $m(1), \ldots, m(r)$ tels que $m(1) + \cdots + m(r) = m$. Soient $a(1), \ldots, a(r)$ des entiers deux à deux distincts. On pose

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = (a(1), \ldots, a(1), \ldots, a(r), \ldots, a(r))$$

où chaque $a(i)$ est répété $m(i)$ fois. On définit un caractère $\chi_{a(1),\ldots,a(r)} : T_m \to k^*$ par

$$\chi_{a(1),\ldots,a(r)}(x_1, \ldots, x_m) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}.$$

Le groupe S_m opère dans le groupe des caractères de T_m et le groupe d'isotropie de $\chi_{a(1),\ldots,a(r)}$ est $S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)}$. On étend $\chi_{a(1),\ldots,a(r)}$ en un caractère du sous-groupe d'indice fini $T_m \cdot (S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)})$ de Γ_m, par le caractère trivial de $S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)}$. Alors $\chi_{a(1),\ldots,a(r)} \otimes [\lambda(1)] \otimes \cdots \otimes [\lambda(r)]$ est une représentation irréductible de $T_m \cdot (S_{m(1)} \times \cdots \times S_{m(r)})$. On note

$$[\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)]$$

la représentation de Γ_m induite de $\chi_{a(1),\ldots,a(r)} \otimes [\lambda(1)] \otimes \cdots \otimes [\lambda(r)]$. On a :

$$\dim[\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)) = \frac{m!}{m(1)! \cdots m(r)!} \dim[\lambda(1)] \cdots \dim[\lambda(r)].$$

Proposition 1.1 — 1. $[\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)]$ *est irréductible.*

2. $[\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)]$ *est isomorphe à* $[\mu(1), b(1); \ldots; \mu(s), b(s)]$ *si et seulement si :* $r = s$ *et il existe* $\sigma \in S_r$ *telle que* $\lambda(1) = \mu(\sigma(1))$, $\ldots$, $\lambda(r) = \mu(\sigma(r))$ *et* $a(1) - b(\sigma(1)) = \cdots = a(r) - b(\sigma(r))$.

3. *Toute représentation algébrique irréductible de* Γ_m *est isomorphe à l'une des* $[\lambda(1), a(1); \ldots; \lambda(r), a(r)]$.