Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LA REPRÉSENTATION DES ENTIERS PAR LES FORMES CYCLOTOMIQUES DE GRAND DEGRÉ

Étienne Fouvry & Michel Waldschmidt

Tome 148
Fascicule 2

2020

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 253-282

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 148, juin 2020

Comité de rédaction

Christine BACHOC
Yann BUGEAUD
Jean-François DAT
Clothilde FERMANIAN
Pascal HUBERT
Laurent MANIVEL
Julien MARCHÉ
Kieran O'GRADY
Emmanuel RUSS
Christophe SABOT

Marc HERZLICH (Dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
bulletin@smf.emath.fr • smf.emath.fr

© *Société Mathématique de France 2020*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
148 (2), 2020, p. 253-282

SUR LA REPRÉSENTATION DES ENTIERS PAR LES FORMES CYCLOTOMIQUES DE GRAND DEGRÉ

PAR ÉTIENNE FOUVRY & MICHEL WALDSCHMIDT

RÉSUMÉ. — Pour chaque entier $d \geq 4$, nous étudions la suite des entiers positifs représentés par une des formes binaires cyclotomiques $\Phi_n(X, Y)$ pour les n positifs tels que $\varphi(n) \geq d$. Le cas $d = 2$ a été étudié dans notre précédent texte avec C. Levesque (« Representation of integers by cyclotomic binary forms », *Acta Arith.* **184** (2018), no. 1, p. 67–86, `http://arxiv.org/abs/1701.01230`). Notre démonstration repose sur une variante d'un énoncé de C.L. Stewart and S.Y. Xiao (« On the representation of integers by binary forms », *Math. Ann.* **375** (2019), p. 133–163, `http://arxiv.org/abs/1605.03427`) concernant les valeurs communes prises par deux formes binaires de même degré et de discriminants non nuls. Toutes les constantes sont effectivement calculables.

ABSTRACT (*On the representation of integers by cyclotomic forms with large degree*). — For each integer $d \geq 4$, we study the sequence of positive integers which are represented by one at least of the cyclotomic binary forms $\Phi_n(X, Y)$, with n a positive integer satisfying $\varphi(n) \geq d$. The case $d = 2$ was studied in our previous work with C. Levesque ("Representation of integers by cyclotomic binary forms", *Acta Arith.* **184** (2018), no. 1, p. 67–86, `http://arxiv.org/abs/1701.01230`). Our proof is based on a variant of a statement of C.L. Stewart and S.Y. Xiao ("On the representation of integers by binary forms", *Math. Ann.* **375** (2019), p. 133–163, `http://arxiv.org/abs/1605.03427`) concerning the common values taken by two binary forms of the same degree and non-zero discriminants. All constants are effectively computable.

Texte reçu le 8 mai 2019, modifié le 4 septembre 2019, accepté le 9 septembre 2019.

ÉTIENNE FOUVRY, Université Paris–Saclay, CNRS, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, F–91405 Orsay, France • *E-mail :* `etienne.fouvry@universite-paris-saclay.fr`
MICHEL WALDSCHMIDT, Sorbonne Université, Institut Mathématique de Jussieu IMJ-PRG, F-75005 Paris, France • *E-mail :* `michel.waldschmidt@imj-prg.fr`

Classification mathématique par sujets (2020). — 11E76.

Mots clefs. — Formes cyclotomiques.

© Société Mathématique de France
doi:10.24033/bsmf.2805

1. Introduction

Rappelons ([6]) que la suite $(\Phi_n(X,Y))_{n\geq 1}$ des *formes cyclotomiques* est définie par la formule de récurrence

$$X^n - Y^n = \prod_{k|n} \Phi_k(X,Y).$$

Le polynôme $\Phi_n(X,Y)$ est homogène de degré $\varphi(n)$ (φ fonction indicatrice d'Euler) et il est relié au polynôme cyclotomique $\phi_n(t) \in \mathbb{Z}[t]$ par la formule

$$\Phi_n(X,Y) = Y^{\varphi(n)}\phi_n(X/Y).$$

Puisque, pour $n \geq 3$, le polynôme $\phi_n(t)$ n'a aucun zéro réel, on a donc l'inégalité

$$\Phi_n(x,y) \gg \max(|x|^{\varphi(n)}, |y|^{\varphi(n)}),$$

uniformément sur x et y réels.

Pour $N \geq 2$ et d entier pair, on désigne par $\mathcal{A}_d(N)$ le cardinal de l'ensemble des entiers $1 \leq m \leq N$ tels qu'il existe un entier n et des entiers (x,y) vérifiant les trois conditions

$$\begin{cases} \varphi(n) \geq d, \\ \Phi_n(x,y) = m, \\ \max(|x|,|y|) \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

On s'intéresse au comportement asymptotique de $\mathcal{A}_d(N)$ pour d fixé et N tendant vers l'infini. Il est alors sage d'introduire la dernière condition de (1) puisque pour tout p premier on a $\Phi_p(1,1) = p$ et le cardinal des $p \leq N$ masquerait le terme principal de l'estimation qui sera donnée en (6). Par convention, nous réservons la lettre p aux nombres premiers. Enfin, si n est un entier impair, on a l'égalité

$$\Phi_{2n}(X,Y) = \Phi_n(X,-Y).$$

On peut ainsi ajouter, aux conditions de (1), la condition de congruence

$$n \not\equiv 2 \bmod 4, \tag{2}$$

sans modifier l'étude de $\mathcal{A}_d(N)$.

Appelons *totient* toute valeur prise par la fonction φ. La suite croissante des totients est ainsi

$$\mathfrak{T} := \{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 28,\ 30,\ \ldots\}.$$

Cette suite contient la suite des $p-1$ mais reste mystérieuse à de nombreux points de vue (on se reportera avec profit aux articles de Ford [4] et [5] traitant, entre autres choses, de la fonction de comptage de la suite $\mathfrak{T}$ et du nombre de solutions à l'équation $\varphi(n) = d$). Il est naturel de restreindre l'étude de

$\mathcal{A}_d(N)$ au cas où d est un totient pair. L'étude de $\mathcal{A}_2(N)$ a été traitée dans [6, Théorème 1.3] où il est prouvé qu'il existe deux constantes $C_2 = 1,403132\ldots$ et $C_2' = 0,302316\ldots$ telles que, uniformément pour $N \geq 2$, on a l'égalité

$$\mathcal{A}_2(N) = C_2 \frac{N}{(\log N)^{\frac{1}{2}}} - C_2' \frac{N}{(\log N)^{\frac{3}{4}}} + O\left(\frac{N}{(\log N)^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{3}$$

Les constantes C_2 et C_2' se définissent au moyen des valeurs, au point $s = 1$, de certaines fonctions de Dirichlet $L(s, \chi)$ où χ est le caractère de Kronecker attaché aux corps quadratiques de discriminants -4, -3 et 12.

Pour un totient $d \geq 4$, les outils de [6] conduisent à la majoration

$$\mathcal{A}_d(N) = O\big(N^{\frac{2}{d}} (\log N)^{1,161}\big), \tag{4}$$

(voir corollaire 4.11 et sa preuve ci–dessous).

Par rapport à [6], le présent travail innove en injectant résultats et méthodes de [9] que nous décrirons au §2. Contentons–nous pour l'instant de donner notre résultat principal qui améliore notablement (4). Pour son énoncé, nous introduisons les notations suivantes :

- si d est un totient, on note $d^\dagger$ le successeur immédiat de d dans la suite $\mathfrak{T}$.
- pour d entier ≥ 3, on pose

$$\eta_d = \begin{cases} 2/9 + 73/(108\sqrt{3}) & \text{si } d = 3, \\ (1/2 + 9/(4\sqrt{d}))/d & \text{si } 4 \leq d \leq 20, \\ 1/d & \text{pour } d \geq 21. \end{cases} \tag{5}$$

On prouvera donc le

Théorème 1.1. — *Soit $d \geq 4$ un totient. Alors, il existe une constante $C_d > 0$, telle que, pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément pour $N \geq 2$, on a l'égalité*

$$\mathcal{A}_d(N) = C_d N^{\frac{2}{d}} + O(N^{\frac{2}{d^\dagger}}) + O_\varepsilon(N^{\eta_d + \varepsilon}). \tag{6}$$

Remarque 1.2. — La formule (6) est d'autant plus précise que $d^\dagger - d$ est grand. Ainsi, dans le cas particulier où $d \geq 6$, la minoration triviale

$$d^\dagger \geq d + 2,$$

réduit la formule (6) en sa forme plus grossière

$$\mathcal{A}_d(N) = C_d N^{\frac{2}{d}} + O(N^{\frac{2}{d+2}}).$$

Remarque 1.3. — Le théorème 1.1 suppose $d \geq 4$. La formule (3) correspond donc au cas $d = 2$. Mais, par la présence au dénominateur du facteur $(\log N)^{\frac{1}{2}}$, elle diffère notablement de (6). Cette différence s'explique comme suit. Il y a

trois formes cyclotomiques de degré 2. Ce sont les trois formes quadratiques binaires

$$\Phi_3(X,Y) = X^2 + XY + Y^2, \quad \Phi_4(X,Y) = X^2 + Y^2, \quad \text{et} \quad \Phi_6(X,Y) = X^2 - XY + Y^2. \tag{7}$$

Puisque $\Phi_6(X,-Y) = \Phi_3(X,Y)$ les formes Φ_6 et Φ_3 représentent les mêmes entiers. Mais les formes Φ_3 et Φ_4 à la différence des formes cyclotomiques de degré au moins 4, ont un nombre infini d'automorphismes comme définis au §4.4. Par exemple on a $\mathrm{Aut}\Phi_4 = \mathrm{O}(2,\mathbb{Q})$ (le groupe des matrices orthogonales 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Q}$).

L'objet des théorèmes 1.4 et 1.6 est de compléter la formule (6). Nous précisons d'abord la constante C_d.

Théorème 1.4. — *Soit $d \geq 4$ un totient. La constante C_d de la formule* (6) *vérifie l'égalité*

$$C_d = \sum_{\substack{n \not\equiv 2 \bmod 4 \\ \varphi(n)=d}} w_n\, A_{\Phi_n} \tag{8}$$

où

$$w_n := \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 4 \nmid n, \\ \frac{1}{8} & \text{si } 4 \mid n, \end{cases} \tag{9}$$

et

$$A_{\Phi_n} = \iint_{\Phi_n(x,y)\leq 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Voici deux exemples dans lesquels la formule (8) donnant la valeur de la constante C_d se simplifie.

1. Soit $p \geq 5$ un nombre premier de Sophie Germain, c'est-à-dire tel que le nombre $\ell = 2p+1$ soit premier. Alors ℓ est l'unique entier $\not\equiv 2 \bmod 4$ tel que $\varphi(\ell) = 2p$ et on a l'égalité
$$C_{2p} = \frac{1}{4} A_{\Phi_\ell}.$$
On conjecture qu'il y a une infinité de nombres premiers de Sophie Germain.
2. Supposons que $d \geq 4$ est une puissance de 2, disons $d = 2^k$.
On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des nombres entiers $m \geq 1$ dont le développement binaire $m = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_r}$ est tel que chacun des nombres $F_{a_i} = 2^{2^{a_i}} + 1$ est premier (nombre premier de Fermat). L'ensemble $\mathcal{M}$ contient les entiers $1, 2, 3, \ldots, 31$; on ne connaît pas d'autre

élément de $\mathcal{M}$. Pour chaque $m \in \mathcal{M}$ vérifiant $m \leq k$, on définit

$$\ell_k(m) = 2^{k-m+1} F_{a_1} F_{a_2} \cdots F_{a_r},$$

de sorte que $\varphi(\ell_k(m)) = 2^k$. Les entiers $n \not\equiv 2 \bmod 4$ tels que $\varphi(n) = d$ sont d'une part $n = 2d$, qui est multiple de 4, d'autre part les $\ell_k(m)$ avec $m < k$, qui sont aussi multiples de 4, et enfin, si $k \in \mathcal{M}$, $\ell_k(k)/2$ qui est impair, avec $A_{\Phi_{\ell_k(k)}} = A_{\Phi_{\ell_k(k)/2}}$. Alors

$$C_d = \begin{cases} \dfrac{1}{8} A_{\Phi_{2d}} + \dfrac{1}{8} \displaystyle\sum_{\substack{m \in \mathcal{M} \\ m<k}} A_{\Phi_{\ell_k(m)}} & \text{si } k \notin \mathcal{M}, \\ \dfrac{1}{8} A_{\Phi_{2d}} + \dfrac{1}{8} \displaystyle\sum_{\substack{m \in \mathcal{M} \\ m<k}} A_{\Phi_{\ell_k(m)}} + \dfrac{1}{4} A_{\Phi_{\ell_k(k)}} & \text{si } k \in \mathcal{M}, \end{cases}$$

avec

$$A_{\Phi_{2d}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^d)^{2/d}} = \frac{2}{d} \frac{\Gamma(1/d)^2}{\Gamma(2/d)}$$

(cf. §6.1 et [9, Corollaire 1.3 et § 5]).

Nous montrerons que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} A_{\Phi_n} = 4.$$

C'est une conséquence de l'énoncé plus précis suivant, concernant le *domaine fondamental cyclotomique* $\mathcal{O}_n$ défini par

$$\mathcal{O}_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi_n(x,y) \leq 1\}.$$

Théorème 1.5. — *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que, pour $n \geq n_0$, le domaine fondamental cyclotomique $\mathcal{O}_n$ d'indice n contient le carré centré en O de côté $2 - n^{-1+\varepsilon}$ et est contenu dans le carré centré en O de côté $2 + n^{-1+\varepsilon}$.*

Enfin nous discutons de l'optimalité de la formule (6)

Théorème 1.6. — *On adopte les notations du théorème 1.1. Soit $d \geq 4$ un entier tel que d et $d+2$ soient des totients. Il existe une constante positive $v_d > 0$ telle que pour N suffisamment grand, on ait l'inégalité*

$$\mathcal{A}_d(N) \geq C_d N^{\frac{2}{d}} + v_d N^{\frac{2}{d+2}}.$$

Remarque 1.7. — Il est naturel de conjecturer qu'il y a une infinité de d tels que $d+2$ soit aussi un totient : c'est une conséquence de la conjecture des nombres premiers jumeaux. Enfin, on peut tout à fait envisager des énoncés analogues sous l'hypothèse $d^\dagger = d + \nu$ où ν est un entier pair fixé. Cette extension nécessiterait une adaptation des propriétés de confinement décrites aux §4.1, §4.2 et §4.3.