

# Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## ALGÈBRICITÉ MODULO $p$ , SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES ET STRUCTURES DE FROBENIUS FORTES

Daniel Vargas-Montoya

Tome 149  
Fascicule 3

2021

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 439-477

---

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel  
de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 149, septembre 2021

---

**Comité de rédaction**

Christine BACHOC	Julien MARCHÉ
Yann BUGEAUD	Kieran O'GRADY
François DAHMANI	Emmanuel RUSS
Clothilde FERMANIAN	Béatrice de TILIÈRE
Wendy LOWEN	Eva VIEHMANN
Laurent MANIVEL	

Marc HERZLICH (Dir.)

**Diffusion**

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
commandes@smf.emath.fr	www.ams.org

**Tarifs**

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement électronique : 135 € (\$ 202),

avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € (\$ 296)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

**Secrétariat : Bulletin de la SMF**

*Bulletin de la Société Mathématique de France*  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96  
bulletin@smf.emath.fr • smf.emath.fr

© Société Mathématique de France 2021

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

---

## ALGÉBRICITÉ MODULO $p$ , SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES ET STRUCTURES DE FROBENIUS FORTES

PAR DANIEL VARGAS-MONTOYA

---

RÉSUMÉ. — Ce travail est consacré à l'étude de l'algébricité modulo  $p$  des  $G$ -fonctions de Siegel. Notre but est de souligner la pertinence de la notion de structure de Frobenius forte, classiquement étudiée dans la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques, pour l'étude d'une conjecture d'Adamczewski et Delaygue concernant le degré d'algébricité de réductions modulo  $p$  de  $G$ -fonctions. Nous rendons d'abord explicite un résultat de Christol en montrant que si  $f(z)$  est une  $G$ -fonction qui annule un opérateur différentiel dans  $\mathbb{Q}(z)[d/dz]$  d'ordre  $n$  qui est muni d'une structure de Frobenius forte de période  $h$  pour le nombre premier  $p$  et que  $f(z)$  est à coefficients dans  $\mathbb{Z}_{(p)}$ , alors la réduction de  $f$  modulo  $p$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(z)$  et son degré d'algébricité est majoré par  $p^{n^2h}$ . En généralisant une approche introduite par Salinier, nous montrons ensuite qu'un opérateur fuchsien à coefficients dans  $\mathbb{Q}(z)$ , dont le groupe de monodromie est rigide et dont les exposants sont rationnels, possède, pour presque tout nombre premier  $p$ , une structure de Frobenius forte de période  $h$ , où  $h$  est majorée explicitement et indépendamment de  $p$ . Une version légèrement différente de ce résultat a été démontré récemment par Crew en suivant une approche différente fondée sur la cohomologie  $p$ -adique. Nous utilisons ces deux résultats pour résoudre la conjecture mentionnée dans le cas des séries hypergéométriques généralisées.

---

*Texte reçu le 8 mai 2020, modifié le 3 novembre 2020, accepté le 16 mars 2021.*

DANIEL VARGAS-MONTOYA, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, Bâtiment Braconnier, 21 Avenue Claude Bernard, 69100 Villeurbanne • E-mail : [vargas@math.univ-lyon1.fr](mailto:vargas@math.univ-lyon1.fr)

Classification mathématique par sujets (2010). — 11E95, 12H25.

Mots clefs. — Structure de Frobenius forte, réduction modulo  $p$ , algébricité modulo  $p$ , équations différentielle  $p$ -adique, rigidité.

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Grant Agreement No 648132.

ABSTRACT (*Algebraicity modulo  $p$ , hypergeometric series and strong Frobenius structure*). — This work is devoted to study of algebraicity modulo  $p$  of Siegel's  $G$ -functions. Our goal is emphasize the relevance of the notion of strong Frobenius structure, classically studied in the theory of the  $p$ -adic differential equations, for the study of a Adamczewski–Delaygue's conjecture concerning the degree of algebraicity modulo  $p$  of  $G$ -functions. For this, we first make a Christol's result explicit by showing that if  $f(z)$  is a  $G$ -function which is a solution of a differential operator in  $\mathbb{Q}(z)[d/dz]$  of order  $n$  which has a strong Frobenius structure with period  $h$  for the prime number  $p$  and that  $f(z)$  belongs to  $\mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ , then the reduction of  $f(z)$  modulo  $p$  is algebraic over  $\mathbb{F}_p(z)$  and its degree of algebraicity is bounded by  $p^{n^2h}$ . By generalizing an approach introduced by Salinier, we then show that a Fuchsian operator with coefficients in  $\mathbb{Q}(z)$ , whose monodromy group is rigid and whose exponents are rational has for almost all prime numbers  $p$  a strong Frobenius structure with period  $h$ , where  $h$  is explicitly bounded and does not depend on  $p$ . A slightly different version of this result has been demonstrated recently by Crew following a different approach based on the  $p$ -adic cohomology. We use these two results to solve the mentioned conjecture in the case of generalized hypergeometric series.

## 1. Introduction

Etant donnés un corps  $K$  et une série formelle de plusieurs variables  $g(z_1, \dots, z_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} a(i_1, \dots, i_n) z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \in K[[z_1, \dots, z_n]]$ , on définit la *diagonale* de  $g$  comme la série formelle d'une variable

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} a(j, j, \dots, j) z^j \in K[[z]].$$

Lorsque  $K$  est de caractéristique nulle, cette opération est transcendante, dans le sens où la diagonale d'une série formelle algébrique (i.e., algébrique sur le corps des fractions rationnelles  $K(z_1, \dots, z_n)$ ) est généralement transcendante sur le corps  $K(z)$ . Un exemple très simple, voir [1], est donné par la diagonale de la fraction rationnelle  $\frac{4}{(2-z_1-z_2)(2-z_3-z_4)}$  qui est égale à

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{4n}} \binom{2n}{n}^2 z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

En revanche, lorsque  $K$  est un corps de caractéristique non nulle, Furstenberg [18] a montré que la diagonale d'une série formelle rationnelle est toujours algébrique. Deligne [13] a ensuite étendu ce résultat au cas des diagonales de séries formelles algébriques. Il souligne également la conséquence remarquable suivante : si  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) z^n \in \mathbb{Z}[[z]]$  est la diagonale d'une série formelle algébrique, alors pour tout nombre premier  $p$ , la réduction modulo  $p$  de  $f$ , c'est-à-dire la série formelle

$$f|_p(z) = \sum_{n \geq 0} (a(n) \bmod p) z^n \in \mathbb{F}_p[[z]],$$

est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(z)$ . Un problème naturel consiste alors à étudier la façon dont le degré d'algébricité de  $f|_p$  varie avec  $p$ . Deligne suggère dans [13] qu'il existe une constante  $c$  indépendante de  $p$  telle que  $\deg(f|_p) < p^c$ . Il prouve également que c'est bien le cas pour les diagonales de fonctions algébriques de deux variables. Le cas général n'est traité que plus récemment par Adamczewski et Bell dans [1]. Ces auteurs montrent également, qu'on ne peut, en général, espérer mieux qu'une majoration polynomiale en  $p$ . Lorsque  $K = \overline{\mathbb{Q}}$ , les diagonales de séries formelles algébriques forment une sous-classe de celle des  $G$ -fonctions introduite par Siegel [23] en 1929. Rappelons que  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est une  $G$  fonction si les  $a_n$  sont des nombres algébriques et s'il existe un nombre réel  $C > 0$  tel que :

1. la fonction  $f$  annule un opérateur différentiel  $L$  à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}(z)$  ;
2. la valeur absolue de chaque conjugué de Galois de  $a_n$  est inférieure à  $C^{n+1}$  pour tout  $n \geq 0$  ;
3. il existe une suite  $D_m$  d'entiers strictement positifs tels que  $D_m < C^m$  et  $D_m a_n$  est un entier algébrique pour tout  $n \leq m$ .

Cette définition implique qu'il existe un corps de nombres  $K$  tel que  $f(z) \in K[[z]]$ . Considérons un tel  $K$ . Soient  $\vartheta_K$  l'anneau des entiers de  $K$  et  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $\vartheta_K$  tel que les coefficients de  $f$  appartiennent à  $\vartheta_{K,\mathfrak{p}}$ , la localisation de  $\vartheta_K$  en  $\mathfrak{p}$ . Notons  $\mathbf{k}_{\mathfrak{p}}$  le corps résiduel de  $\vartheta_{K,\mathfrak{p}}$ , c'est-à-dire  $\mathbf{k}_{\mathfrak{p}} = \vartheta_{K,\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\vartheta_{K,\mathfrak{p}} = \vartheta_K/\mathfrak{p}$ . On peut alors réduire  $f$  modulo  $\mathfrak{p}$  et poser

$$f|_{\mathfrak{p}}(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n \bmod \mathfrak{p}) z^n \in \mathbf{k}_{\mathfrak{p}}[[z]]$$

et formuler la conjecture suivante [4].

CONJECTURE 1.1 (Adamczewski-Delaygue). — *Soient  $K$  un corps de nombres et  $f(z) \in K[[z]]$  une  $G$ -fonction. Supposons que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  de  $\vartheta_K$  tel que  $f \in \vartheta_{K,\mathfrak{p}}[[z]]$  soit infini. Alors, on a :*

- (i)  $f|_{\mathfrak{p}}$  est algébrique sur  $\mathbf{k}_{\mathfrak{p}}(z)$  pour presque tout  $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$  ;
- (ii) il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $\mathfrak{p}$  vérifiant (i),  $\deg(f|_{\mathfrak{p}}) < p^c$ , où  $p$  désigne la caractéristique du corps  $\mathbf{k}_{\mathfrak{p}}$ .

Les résultats de Deligne [13] et d'Adamczewski et Bell [1] mentionnés précédemment montrent que cette conjecture est vérifiée pour les diagonales de séries algébriques et l'article [3] fournit également d'autres familles d'exemples parmi les séries hypergéométriques généralisées ou les sommes multiples de produits de coefficients binomiaux. C'est en particulier le cas de la série hypergéométrique  $f_1(z) = {}_2F_1(1/2, 1/2; 2/3, z)$  qui n'est pas la diagonale d'une série formelle algébrique car elle n'est pas globalement bornée. Par contre, d'après la proposition 8.5 de [3], en considérant l'ensemble  $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P} : p \equiv 1 \pmod{3}\}$ , on obtient que pour tout  $p \in \mathcal{S}$ ,  $f_1$  peut se réduire modulo  $p$  et  $f_{1|p}(z) = A_p(z)f_{1|p}(z)^p$  où  $A_p(z) \in \mathbb{F}_p(z)$ . Ainsi,  $f_{1|p}(z)$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p(z)$  et  $\deg(f_{1|p}) < p$ .