

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

APPROXIMATION DIOPHANTINNE ET DISTRIBUTION LOCALE SUR UNE SURFACE TORIQUE II

Huang Zhizhong

Tome 148
Fascicule 2

2020

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 189-235

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel
de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 148, juin 2020

Comité de rédaction

| | |
|---------------------|------------------|
| Christine BACHOC | Laurent MANIVEL |
| Yann BUGEAUD | Julien MARCHÉ |
| Jean-François DAT | Kieran O'GRADY |
| Clothilde FERMANIAN | Emmanuel RUSS |
| Pascal HUBERT | Christophe SABOT |

Marc HERZLICH (Dir.)

Diffusion

| | |
|--|--|
| Maison de la SMF | AMS |
| Case 916 - Luminy | P.O. Box 6248 |
| 13288 Marseille Cedex 9 | Providence RI 02940 |
| France | USA |
| commandes@smf.emath.fr | www.ams.org |

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement électronique : 135 € (\$ 202),

avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € (\$ 296)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96

bulletin@smf.emath.fr • smf.emath.fr

© Société Mathématique de France 2020

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

APPROXIMATION DIOPHANTINNE ET DISTRIBUTION LOCALE SUR UNE SURFACE TORIQUE II

PAR HUANG ZHIZHONG

RÉSUMÉ. — Nous proposons une formule empirique pour le problème de distribution locale des points rationnels de hauteur bornée. Il s'agit d'une version locale du principe de Batyrev-Manin-Peyre. Nous la vérifions pour une surface torique, sur laquelle des courbes rationnelles cuspidales et des courbes rationnelles nodales toutes les deux contribuent aux meilleures approximations en dehors d'un fermé de Zariski. Nous démontrons qu'en enlevant une partie mince, il existe une mesure limite et une formule asymptotique pour le grossissement critique.

ABSTRACT (*Diophantine approximation and local distribution on a toric surface II*). — We propose an empirical formula for the problem of local distribution of rational points of bounded height. This is a local version of the Batyrev-Manin-Peyre principle. We verify this for a toric surface, on which cuspidal rational curves and nodal rational curves all give the best approximations outside a Zariski closed subset. We prove the existence of a limit measure as well as an asymptotic formula for the critical zoom by removing a thin set.

1. Introduction

1.1. Contexte et heuristique. — Concernant les variétés ayant beaucoup de points rationnels, une question naturelle est combien il y en a de hauteur bornée et comment ils sont distribués. Dans des années 1990, Batyrev et Manin ont

Texte reçu le 17 janvier 2019, modifié le 2 mai 2019, accepté le 6 mai 2019.

HUANG ZHIZHONG, Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik, Leibniz Universität Hannover, Welfengarten 1, 30167 Hannover, Deutschland • *E-mail* : zhizhong.huang@yahoo.com

Classification mathématique par sujets (2010). — 11G50, 11K60, 14M25.

Mots clefs. — Points rationnels de hauteur bornée, approximation diophantienne.

conjecturé une formule asymptotique (cf. [1, 3.11 & 3.12]) qui donne une prédiction pour l'ordre de croissance du cardinal de l'ensemble des points rationnels de hauteur bornée. Peyre (cf. [29, Conjecture 2.3.1]) a ensuite reformulé et raffiné leur conjecture sous une forme faisant intervenir des mesures, que nous appellerons *distribution globale* et nous énonçons comme suit. Soit X une «bonne» variété sur \mathbf{Q} (cf. [30, Notations 2.1]). On note $X(\mathcal{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}}$ l'ensemble des points adéliques de X pour lesquels l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est triviale. On associe une hauteur de Weil exponentielle H au fibré anticanonique ω_X^{-1} .

PRINCIPE 1.1 (Batyrev-Manin-Peyre, [30] Répartition empirique 5.3). — Il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel qu'en notant et $\kappa = \text{rg Pic}(X)$,

$$(1) \quad \delta_{U,B} = \sum_{\substack{P \in U(\mathbf{Q}) \\ H(P) \leq B}} \delta_P,$$

on ait

$$\frac{1}{B(\log B)^{\kappa-1}} \delta_{U,B} \longrightarrow \mu_X^{\text{Br}}, \quad B \rightarrow \infty$$

au sens de convergence vague pour certaine mesure μ_X^{Br} déduite d'un produit de mesures $\prod_{\nu \in \text{Val}(\mathbf{Q})} \mu_{\nu}$ sur $X(\mathcal{A}_{\mathbf{Q}})$ par restriction à $X(\mathcal{A}_{\mathbf{Q}})^{\text{Br}}$.

Remarquons qu'en fait, la partie réelle μ_{∞} est une mesure à densité continue relativement à la mesure de Lebesgue sur $X(\mathbf{R})$ (cf. [29, 2.2.1]). Alors que la conjecture de Batyrev-Manin est vérifiée pour beaucoup de variétés presque de Fano [30, Définition 3.1], voire singulières, ce principe sous forme de mesure est rarement abordée dans la littérature. Pourtant, les travaux de Batyrev et Tschinkel [4], [2] semblent être en faveur de cela pour les variétés toriques.

Nous nous demandons dans quelle mesure une version plus forte de ce principe puisse être valide. À savoir, prenons un ouvert $D_Q(B)$ d'un point $Q \in X(\mathbf{R})$ pour la topologie réelle dont la taille dépend de B . Pourrions-nous espérer qu'il existe une mesure $\mu_{X,Q}$, définie localement sur le lieu réel de X que nous préciserons dans la suite, telle que pour certain $\kappa' \geq 1$,

$$(2) \quad \sum_{P \in D_Q(B) \cap X(\mathbf{Q}) : H(P) \leq B} \delta_P \sim \text{Vol}(D_Q(B)) B(\log B)^{\kappa'-1} \mu_{X,Q}, \quad B \rightarrow \infty?$$

Une motivation de ce problème est l'étude de la *distribution locale* des points rationnels. Il fut considérée en premier par S. Pagelot [28], où il a pris pour $D_Q(B)$ des boules de rayon $\asymp B^{-\frac{1}{r}}$ (r sera appelé *facteur de zoom* dans la suite) et où il a constaté, sur certaines surfaces toriques, des phénomènes variés pour la distribution locale des points rationnels autour d'un point fixé (décrite par la mesure $\mu_{X,Q}$ dans (2)), même pour de différents r d'une variété fixée. Tout cela n'est pas *a priori* reflétée par la distribution globale (i.e. la mesure μ_X^{Br} dans (1)).

Pour établir l'existence de $\mu_{X,Q}$, il faut souvent retirer certaines sous-variétés *localement accumulatrices* et bien choisir le facteur de zoom r . Les travaux de D. McKinnon et M. Roth ([26] et [27]) concernant l'approximation diophantienne sur les variétés algébriques fournissent une constante α de nature arithmétique et géométrique, appelée *constante d'approximation* (Définition 2.1). S. Pagelot définit dans [28] *la constante essentielle* α_{ess} (Définition 2.2) qui caractérise l'approximation diophantienne générique. Par définition, on a $\alpha \leq \alpha_{\text{ess}}$. En prenant le facteur de zoom r entre α et α_{ess} , la forme de $\mu_{X,Q}$ nous permet de récupérer plus d'informations qui sont «négligées» dans la considération (1). Voir des explications et des illustrations dans [19]. Nous espérons que les constantes $\alpha, \alpha_{\text{ess}}$ jouent un rôle tout comme les invariants de Fujita (les invariants $\alpha(L), t(L)$ dans [1, 2.1 & 3.12]) dans le programme de Batyrev-Manin-Peyre (Principe 1.1) (cf. aussi le travail [23] et les références dedans).

Dans [18, (1.1)] et [19, (1.2)] nous avons défini une famille de mesures qui capturent les points dans $D_Q(B)$. Maintenant nous continuons à proposer des formules asymptotiques prédisant l'ordre de grandeur dans le cas $r = \alpha_{\text{ess}}$. Nous désignons par $A_1(X)$ le groupe de Chow des 1-cycles modulo l'équivalence algébrique, et par $l(X)$ le rang du sous-groupe de $A_1(X)$ engendré par les classes des courbes rationnelles C vérifiant $\alpha(Q, C) = \alpha_{\text{ess}}(Q)$. Tout au long de cet article, sauf si mentionné autrement, toutes les constantes d'approximation et tous les degrés seront calculés par rapport au fibré anti-canonique. Pour une partie Y de $X(\mathbf{Q})$, nous notons $\{\delta_{Y,Q,B,r}\}_B$ la famille de mesures de zoom de facteur r comptant les points rationnels sur Y de hauteur $\leq B$ (cf. §2.2) définie sur l'espace tangent $(T_Q X)_{\mathbf{R}}$.

FORMULE EMPIRIQUE 1.2 (version faible). — *En dehors d'une partie mince M , nous avons que pour toute fonction f continue à support compact définie sur $(T_Q X)_{\mathbf{R}}$,*

$$(3) \quad \delta_{X \setminus M, Q, B, \alpha_{\text{ess}}}(f) = O_f \left(B^{1 - \frac{\dim X}{\alpha_{\text{ess}}}} (\log B)^{l(X) - 1} \right).$$

RÉPARTITION EMPIRIQUE 1.3 (version forte). — *Si $\alpha_{\text{ess}}(Q) > \dim X$, alors en dehors d'une partie mince M , nous avons*

$$(4) \quad \frac{1}{B^{1 - \frac{\dim X}{\alpha_{\text{ess}}}} (\log B)^{l(X) - 1}} \delta_{X \setminus M, Q, B, \alpha_{\text{ess}}} \rightarrow \delta_{\alpha_{\text{ess}}},$$

au sens de convergence vague pour une certaine mesure $\delta_{\alpha_{\text{ess}}}$ sur $(T_Q X)_{\mathbf{R}}$.

L'étude des formules 1.2 & 1.3 devrait ajouter une nouvelle évidence sur la connexion entre l'arithmétique des corps globaux et celle des corps de fonctions.

1.2. Résultats principaux. — Suite aux travaux [18] et [19] qui démontrent la formule 1.3 pour la surface X_3 et 1.2 pour Y_4 respectivement, dans cet article on considère la surface torique Y_3 dont l'éventail est représenté au milieu de la Figure 1.1 suivante. Admettant \mathbf{P}^2 et $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ comme modèles minimaux, elle

est une surface de del Pezzo généralisée (cf. [8]) (c'est-à-dire la désingularisation minimale d'une surface de del Pezzo singulière de degré 5). Le résultat sur ces trois surfaces donne des évidences fortes sur le principe que le couple $(\alpha, \alpha_{\text{ess}})$ et la façon dont elles sont calculées devraient caractériser l'accumulation locale des points rationnels.

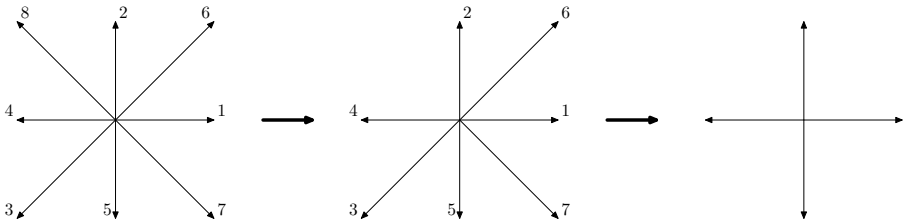


FIGURE 1.1. Les éventails de Y_4 , de Y_3 et de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

Nous fixons tout au long ce travail le point central $Q = [1 : 1] \times [1 : 1]$. Notre premier résultat principal, concernant l'approximation de Q par d'autres points rationnels sur Y_3 , dit que des courbes nodales, qui couvrent une partie dense de Y_3 et font déjà des objets centraux d'étude pour la surface Y_4 [19], et des courbes cuspidales donnent en même temps les meilleurs approximatifs en dehors d'un fermé de Zariski (cf. §3.4.1, §3.4.2). Autrement dit, ces deux types de courbes achèvent la constante α .

THÉORÈME 1.4 (cf. Proposition 4.1, Corollaire 4.3). — *Nous avons*

- $\alpha(Q, Y_3) = 2$. Elle s'obtient sur les trois courbes rationnelles lisses $l_i, (1 \leq i \leq 3)$ de degré minimal passant par Q . Ces courbes sont localement accumulatrices ;
- $\alpha_{\text{ess}}(Q) = \frac{5}{2}$. Elle peut être calculée sur des courbes nodales et des courbes cuspidales passant par Q .

Les courbes $l_i, 1 \leq i \leq 3$ sont en fait les (transformations strictes des) sections de bidegré $(1, 1)$ joignant Q et l'un des 3 points éclatés dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ (cf. (13)). Il s'en suit que la surface Y_3 et la partie $Y_3 \setminus \bigcup_{i=1}^3 l_i$ vérifie la conjecture de D. McKinnon [26, Conjecture 2.9]. Bien que des courbes nodales et des courbes cuspidales aient la même valeur de constante d'approximation, le point Q est approché de manière radicalement différente suivant elles (cf. §2.3), à cause de la façon dont α est calculée sur les courbes rationnelles (cf. Théorème 2.3). Le premier type correspond à l'approximation d'un nombre quadratique et le travail [19] montre que le nombre des points rationnels entrant dans le zoom critique est faible et il n'existe pas de mesure décrivant la distribution locale (cf. Théorème 2.4). Alors que pour le deuxième on approche un point rationnel sur le corps de base \mathbf{Q} . Dans ce cas l'ordre de grandeur est comparable avec

la croissance de hauteur et les points sont répartis asymptotiquement suivant une mesure limite (cf. Théorème 2.5).

Notre deuxième théorème principal confirme que la Répartition Empirique 1.3 vaut pour Y_3 .

THÉORÈME 1.5 (cf. Théorèmes 7.6, 7.15, 7.16). — Soient $Z = \bigcup_{i=1}^3 l_i, U = Y_3 \setminus Z$.

1. Pour $2 = \alpha(Q, Y_3) \leq r < \frac{5}{2}$, nous avons

$$\frac{1}{B^{1-\frac{1}{r}}} \delta_{Y_3, Q, B, r} \rightarrow \delta_r,$$

où δ_r est une mesure à support dans Z ;

2. Pour $r = \alpha_{\text{ess}}(Q) = \frac{5}{2}$, il existe une partie mince, qui est la réunion de Z du type I et M du type II, telle qu'en notant $V = Y_3(\mathbf{Q}) \setminus (Z(\mathbf{Q}) \cup M)$, nous ayons

$$\frac{1}{B^{\frac{1}{5}}} \delta_{V, Q, B, \frac{5}{2}} \longrightarrow \delta_{\frac{5}{2}},$$

où $\delta_{\frac{5}{2}}$ est une mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^2 .

C'est un fait empirique que la difficulté d'établir l'existence de la mesure limite augmente lorsque le degré de la surface baisse. Ceci est parallèle avec la conjecture de Batyrev-Manin sur la répartition globale (1). Même s'il n'est pas ardu d'établir une majoration uniforme d'ordre de grandeur $B^{\frac{1}{5}+\delta}$ (cf. Proposition 4.4) pour $r = \frac{5}{2}$, cependant, démontrer des formules asymptotiques ainsi que la convergence de mesures de zoom est un processus beaucoup plus délicat, et surtout on a dû surmonter la difficulté pour travailler avec le paramétrage donné par des courbes nodales dans [19, §5.2.2]. Nous renvoyons au Théorème 7.6 pour une formule asymptotique précise comprenant la mesure $\delta_{\frac{5}{2}}$ et un terme d'erreur. Ce serait intéressant de pouvoir interpréter le facteur arithmétique qui apparaît dans le terme principal de façon géométrique comme dans le Principe 1.1. Signalons que la densité de la mesure $\delta_{\frac{5}{2}}$ fait apparaître les trois courbes $l_i, 1 \leq i \leq 3$ qui sont localement accumulatrices. Ceci est analogue au résultat pour la surface X_3 (cf. [18, Théorème 1.3]).

Les parties minces (Définition 6.1), dont la contribution a été considérée comme négligeable dans plupart de cas (cf. le théorème de S.D. Cohen, [34, §13 Theorem 1]), se montrent parfois problématiques dans le programme de Batyrev-Manin (Principe 1.1). Elles ont été reprises depuis le premier contre-exemple de V. V. Batyrev et Yu. Tschinkel [3]. Mais c'est rare dans la littérature qu'on soit capable de contrôler le cardinal de la partie obtenue en retirant une partie mince. À la connaissance de l'auteur, les seules réussites jusqu'au présent sont le résultat du Rudulier [22] (cf. aussi [31, §8]) où elle a considéré des schémas de Hilbert des points sur des surfaces, et celui de Browning et