Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UNE NOUVELLE PREUVE DE LA CONCORDANCE DES CLASSES DÉFINIES PAR M.-H. SCHWARTZ ET PAR R. MACPHERSON

Paolo Aluffi & Jean-Paul Brasselet

Tome 136
Fascicule 2

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 159-166

Bull. Soc. math. France
136 (2), 2008, p. 159–166

UNE NOUVELLE PREUVE DE LA CONCORDANCE DES CLASSES DÉFINIES PAR M.-H. SCHWARTZ ET PAR R. MACPHERSON

PAR PAOLO ALUFFI & JEAN-PAUL BRASSELET

À Marie-Hélène Schwartz

RÉSUMÉ. — Nous donnons une courte démonstration de ce que les classes des variétés singulières définies par Marie-Hélène Schwartz au moyen des “champs radiaux” coïncident avec la notion fonctorielle définie par Robert MacPherson.

ABSTRACT (*A new proof of the agreement between the classes defined by M.-H. Schwartz and R. MacPherson*)

We give a short proof of the fact that the Chern classes for singular varieties defined by Marie-Hélène Schwartz by means of ‘radial frames’ agree with the functorial notion defined by Robert MacPherson.

1. Introduction

Marie-Hélène Schwartz ([6], [7]) a défini, au milieu des années 60, une notion de *classes de Chern pour les variétés singulières* en cohomologie relative, ou, via dualité d'Alexander, en homologie à coefficients entiers. La méthode

Texte reçu le 6 juillet 2006, révisé le 9 janvier 2007

PAOLO ALUFFI, Mathematics Department, Florida State University, Tallahassee FL 32306, U.S.A. • *E-mail :* `aluffi@math.fsu.edu`

JEAN-PAUL BRASSELET, IML – CNRS, Case 907, Luminy, 13288 Marseille Cedex 9, France • *E-mail :* `jpb@iml.univ-mrs.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14C17, 57R20.

Mots clefs. — Classes de Chern, variétés singulières, conjecture de Grothendieck-Deligne, champs radiaux.

utilisée est la théorie d'obstruction appliquée à des champs de repères dont le comportement est contrôlé le long de la partie singulière.

Par la suite, le travail d'Alexander Grothendieck en vue de montrer un 'théorème de Riemann-Roch discret' a été à l'origine de la conjecture de l'existence (en caractéristique zéro) d'une théorie fonctorielle de classes de Chern, comme transformation naturelle du foncteur des fonctions constructibles dans une théorie d'homologie convenable. Cette conjecture est connue sous le nom de conjecture de Deligne-Grothendieck. Celle-ci a été résolue, dans les années 70, par Robert MacPherson [5], lequel a ainsi donné une autre construction de classes de Chern pour les variétés singulières.

Le travail de R. MacPherson est indépendant de celui de M.H. Schwartz, bien que les deux notions aient des points communs : d'une part, les deux notions de classes spécialisent aux classes de Chern usuelles pour les variétés lisses ; d'autre part, le fait que le résultat de M.H. Schwartz étende le Théorème de Poincaré-Hopf aux variétés singulières peut être considéré comme un aspect de la propriété de fonctorialité satisfaite par les classes de MacPherson.

Il était donc naturel de conjecturer que ces deux notions coïncident, ce qui a été démontré en 1979 par M.H. Schwartz et le second auteur du présent article :

THÉORÈME 1.1 ([2]). — *Les classes de Chern homologiques de Schwartz et de MacPherson sont égales.*

La méthode de démonstration consiste à relier les indices des champs radiaux et les classes de Schwartz aux ingrédients principaux de la construction des classes de MacPherson, à savoir l'*obstruction d'Euler locale* et *la classe de Chern-Mather.*

Dans cet article, nous montrons plus directement l'égalité des classes de Schwartz et de MacPherson, sans nous servir des autres invariants des singularités. Ce nouveau point de vue est inspiré par une nouvelle expression de la notion de fonctorialité des classes de Chern en termes de classes définies pour les variétés lisses (mais non nécessairement *complètes*), obtenue par le premier auteur [1]. En fait, des développements ultérieurs ont rendu l'argument indépendant de cette référence, ce qui permet de présenter la présente version de façon autonome.

Dans la section 2, on montre qu'une classe définie pour les variétés X (éventuellement singulières) coïncide nécessairement avec la notion fonctorielle si

– elle peut être écrite comme somme des contributions des strates d'une stratification de X ;
– la contribution d'une strate non singulière S est préservée par morphismes respectant les stratifications ; et
– la classe coïncide avec la classe de Chern du fibré tangent d'une variété complète non singulière.

Dans la section 3 on remarque que les classes définies par Marie-Hélène Schwartz satisfont ces conditions, et le fait qu'elles coïncident avec les classes de MacPherson en résulte immédiatement.

2. Une caractérisation des classes de Chern fonctorielles

Dans cette section, nous travaillons sur un corps arbitraire algébriquement clos de caractéristique zéro, et dans le groupe de Chow A_*. Les résultats sont valables *a fortiori* pour les variétés complexes, en homologie.

2.1. — Soit $\tilde{c}(X) \in A_*X$ une classe définie pour toutes les variétés (éventuellement singulières) X, comme une somme de contributions d'une décomposition de X en union finie disjointe de variétés (éventuellement incomplètes) *non singulières* S_i :

$$X = \coprod_i S_i \ : \ \tilde{c}(X) = \sum_i \tilde{c}(S_i, X);$$

on dit que de telles décompositions sont *admissibles* (pour $\tilde{c}$). Comme nous le verrons, dans certains cas *toute* décomposition de X comme union finie disjointe de sous-variétés non singulières peut être admissible. Dans d'autres situations, des restrictions peuvent être imposées sur les décompositions pour être admissibles : par exemple, on peut demander aux variétés S_i d'être éléments d'une stratification de Whitney de X.

Nous supposons que les strates d'un diviseur à croisements normaux forment une décomposition admissible. Plus précisément : si D est un diviseur à croisements normaux simples, de composantes non singulières D_j, $j \in J$, d'une variété non singulière Y, on suppose que

$$\coprod_{I \subset J} D_I^\circ$$

est une décomposition admissible de Y, où D_I° désigne

$$(\cap_{j\in I} D_j) \smallsetminus (\cup_{j\notin I} D_j).$$

(Par exemple, $D_\varnothing^\circ$ est le complémentaire de D dans Y).

Cette propriété sera immédiatement satisfaite pour les décompositions que nous considérerons.

Définition 2.1. — On dit que la donnée, pour toute variété algébrique X, d'une classe $\tilde{c}(X) \in A_*X$ comme ci-dessus est *localement déterminée* si la condition suivante est réalisée :

– Si $f : Y \to X$ est un morphisme propre, S et $T := f^{-1}(S)$ resp. sont éléments d'une décomposition admissible de X, resp. Y, et f se restreint à un isomorphisme $T \to S$, alors

$$f_* \tilde{c}(T, Y) = \tilde{c}(S, X).$$

Exemple 2.2 (La classe fonctorielle). — On désigne par $c_*(X) \in A_*(X)$ la classe définie par MacPherson dans [5] (voir [3], §19.1.7, pour l'adaptation de la définition au groupe de Chow $A_*(X)$, et [4] pour l'extension aux corps arbitraires algébriquement clos de caractéristique zéro). Rappelons que cette classe est la valeur

$$c_*(X) := c_*(1\!\!1_X) \in A_*X$$

prise, sur la fonction caractéristique constante $1\!\!1_X$, par une transformation naturelle

$$c_* : F \to A_*$$

du foncteur des fonctions constructibles dans le foncteur groupe de Chow. Ici $F(X)$ est le groupe des fonctions constructibles à valeurs entières sur X ; si $g : Y \to X$ est une application propre, l'image directe $g_*(\varphi)$ de la fonction constructible $\varphi = \sum_Z m_Z 1\!\!1_Z \in F(Y)$ est définie comme la fonction sur X dont la valeur en $p \in X$ est

$$g_*(\varphi)(p) := \sum m_Z \, \chi(g^{-1}(p) \cap Z).$$

Ici χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique, sur $\mathbb{C}$; pour l'extension aux autres corps de caractéristique zéro voir [4] ou [1].

Si S désigne une sous-variété quelconque (en particulier non singulière) de X, on pose

$$c_*(S, X) := c_*(1\!\!1_S) \in A_*X.$$

Alors *toute* décomposition de X comme union finie disjointe de sous-variétés non singulières est admissible pour c_*. En effet, si $X = \coprod_i S_i$ alors $1\!\!1_X = \sum_i 1\!\!1_{S_i}$ et donc

$$c_*(X) = c_*(1\!\!1_X) = \sum_i c_*(1\!\!1_{S_i}) = \sum_i c_*(S_i, X).$$

De plus, c_* est localement déterminée. En effet, soit $f : Y \to X$ une application propre qui se restreint à un isomorphisme $T \to S$. Alors

$$f_* c_*(T, Y) = f_* c_*(1\!\!1_T) = c_* f_*(1\!\!1_T) = c_*(1\!\!1_S) = c_*(S, X)$$

puisque c_* est une transformation naturelle, et par définition de l'image directe des fonctions constructibles.