Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOUVELLE PREUVE D'UN THÉORÈME DE YUAN ET HUNT

Thierry Bousch

Tome 136
Fascicule 2

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 227-242

Bull. Soc. math. France
136 (2), 2008, p. 227–242

NOUVELLE PREUVE D'UN THÉORÈME DE YUAN ET HUNT

par Thierry Bousch

Résumé. — Un théorème de Guo-Cheng Yuan & Brian R. Hunt affirme que, pour μ mesure de probabilité invariante d'un système dynamique hyperbolique $T : X \to X$, les fonctions lipschitziennes $X \to \mathbb{R}$ pour lesquelles μ est minimisante ont un intérieur non vide (en topologie de Lipschitz) si et seulement si μ est une orbite périodique de T. Je donnerai une nouvelle preuve de ce théorème, ou plutôt d'un énoncé essentiellement équivalent. Je discuterai aussi de la stabilité des orbites périodiques minimisantes de grande période.

Abstract (*A new proof of a theorem by Yuan and Hunt*). — A theorem of Guo-Cheng Yuan & Brian R. Hunt states that, for μ an invariant probability measure of some hyperbolic dynamical system $T : X \to X$, the Lipschitz continuous functions $X \to \mathbb{R}$ for which μ is minimizing have non-empty interior (for the Lipschitz topology) if and only if μ is a periodic orbit of T. I will give a new proof of this theorem, or rather of an essentially equivalent statement. I will also discuss the stability of minimizing periodic orbits with a large period.

Texte reçu le 11 décembre 2006, révisé le 18 octobre 2007, accepté le 11 janvier 2008

Thierry Bousch, Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `Thierry.Bousch@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 37J50.

Mots clefs. — Mesures minimisantes, cobords lipschitziens.

1. Introduction

Mesures invariantes et orbites périodiques. — Considérons un système dynamique de la forme $T : X \to X$, où X est un espace métrique compact non vide et T une fonction continue. Notons $\mathcal{M}_T$ l'ensemble (compact non vide) des mesures de probabilité boréliennes sur X invariantes par T. Parmi ces probabilités T-invariantes, certaines sont d'une importance particulière : si

$$x_0 \xmapsto{T} x_1 \xmapsto{T} x_2 \xmapsto{T} \cdots \xmapsto{T} x_n = x_0$$

est une orbite périodique de T, alors

$$\frac{1}{n}\Big[\delta_{x_0} + \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_{n-1}}\Big]$$

est une probabilité T-invariante, la seule portée par l'ensemble des x_i, aussi est-il naturel d'identifier cette mesure avec son support, et de dire que la mesure ci-dessus « est » une orbite périodique. Une probabilité invariante est une orbite périodique si et seulement si elle est ergodique et de support fini.

Inversement, on peut voir les mesures invariantes comme une généralisation des orbites périodiques. Les problèmes variationnels se posent (et se résolvent) plus naturellement dans ce cadre, grâce à la compacité de $\mathcal{M}_T$ en topologie faible ; voir par exemple [4].

Mesures minimisantes. — On a en particulier le problème suivant : étant donné une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, trouver la ou les mesures $\mu \in \mathcal{M}_T$ qui minimisent $\langle f, \mu \rangle = \int f \mu$; ce sont les « mesures minimisantes » (pour f). L'existence des mesures minimisantes est garantie par la compacité de $\mathcal{M}_T$, mais leur détermination explicite est un problème difficile, même pour les fonctions f et les systèmes dynamiques $T : X \to X$ les plus simples [2]. Ces exemples particuliers, ainsi que les expériences numériques, suggèrent ce qui doit se passer dans le cas général où T est un système dynamique hyperbolique donné, mais quelconque, tandis que f décrit un « gros » espace fonctionnel.

Un phénomène particulièrement visible se manifeste, qui n'est pas totalement nouveau pour les dynamiciens, puisqu'il s'agit du « verrouillage sur les orbites périodiques ». Ici, cela signifie (i) que les mesures minimisantes sont « souvent » des orbites périodiques, de courte période, et (ii) qu'elles ne bougent pas si on modifie légèrement la fonction f (dans une topologie convenable). Par exemple, dans [2] on a une famille à un paramètre $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de fonctions f_θ, admettant pour chaque θ une unique mesure minimisante μ_θ. Il existe dans $\mathbb{T}$ un sous-ensemble de Cantor K, de mesure nulle et de dimension de Hausdorff nulle, tel que pour tout $\theta \notin K$, μ_θ est une orbite périodique ; en outre, la fonction $\theta \mapsto \mu_\theta$ est constante sur chacune des composantes connexes de $\mathbb{T} - K$ (c'est un escalier du diable).

L'énoncé (ii), qui exprime qu'une orbite périodique donnée μ est minimisante pour un ouvert non vide de fonctions, est le plus simple à comprendre et à justifier. On en trouvera deux explications — assez différentes ! — dans [12] et [3].

L'énoncé (i), affirmant la densité des fonctions admettant une orbite périodique minimisante, est plus problématique. On n'a actuellement là-dessus que des résultats partiels, dans certains espaces fonctionnels agréables : les petits espaces de Hölder [5] et l'espace de Walters [3]. Dans l'espace des fonctions lipschitziennes, ainsi que dans les grands espaces de Hölder, cette question est toujours ouverte. Yuan & Hunt obtiennent cependant le résultat partiel suivant, déjà non trivial : pour toute mesure invariante μ qui n'est pas une orbite périodique, les fonctions lipschitziennes pour lesquelles μ est minimisante sont d'intérieur vide (en topologie de Lipschitz). En d'autres termes, le verrouillage de la mesure minimisante se produit uniquement sur les orbites périodiques.

Le but du présent article est de donner une nouvelle démonstration de ce théorème. Nous obtiendrons en prime un résultat complémentaire : si une fonction lipschitzienne f admet une orbite périodique minimisante μ de (grande) période N, alors il existe des perturbations de f de taille $1/N$ en norme de Lipschitz, pour lesquelles μ cesse d'être minimisante.

Afin d'unifier certains énoncés, le théorème de Yuan et Hunt sera démontré dans le cadre des « systèmes amphidynamiques », une généralisation naturelle des systèmes dynamiques, dont la définition précise sera donnée au chapitre 5.

Distance de Wasserstein. — Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X. La distance de Wasserstein entre deux éléments $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, est définie par

$$d_{\mathrm{w}}(\mu,\nu) \;=\; \sup_{f:\,\mathrm{lip}(f)\leqslant 1} \big|\langle f,\mu\rangle - \langle f,\nu\rangle\big|$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les fonctions lipschitziennes $f : X \to \mathbb{R}$ de constante au plus un. Cette distance métrise la topologie faible de $\mathcal{M}$. Les segments de $\mathcal{M}$ sont géodésiques : pour tous $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{M}$, et $\mu_s = (1-s)\mu_0 + s\mu_1$ avec $0 \leqslant s \leqslant 1$, on a

$$d_{\mathrm{w}}(\mu_0,\mu_s) = s\, d_{\mathrm{w}}(\mu_0,\mu_1), \quad d_{\mathrm{w}}(\mu_s,\mu_1) = (1-s)\, d_{\mathrm{w}}(\mu_0,\mu_1). \tag{1.1}$$

On pourra consulter [10] ou l'appendice A.1 de [1] pour une présentation rapide de la distance de Wasserstein, ou encore le livre [9] pour un exposé beaucoup plus détaillé et une bibliographie exhaustive.

2. Un résultat de finitude

PROPOSITION 2.1. — *Soit X un espace métrique compact, et μ une mesure de probabilité sur X. On suppose qu'il existe une suite $x_0, x_1, x_2 \dots$ de points de X et un entier $n_0 \geqslant 1$ tels que*

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad d_{\mathrm{w}}\left[\frac{\delta_{x_i} + \cdots + \delta_{x_{i+n-1}}}{n}, \mu\right] \leqslant \frac{1}{24}\, d(x_i, x_{i+n})\,. \tag{2.1}$$

Alors on peut écrire

$$\mu = \frac{\delta_{y_0} + \cdots + \delta_{y_{N-1}}}{N}$$

avec $1 \leqslant N < 24n_0$, et $y_0, \dots, y_{N-1}$ des points distincts de X.

Démonstration. — Soit $S \subseteq X^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions (2.1). C'est évidemment un sous-ensemble fermé de $X^{\mathbb{N}}$, stable par l'application de décalage, et il est non vide par hypothèse. Posons

$$r_n = \operatorname*{Inf}_{\mathbf{x}\in S} d(\pi_0\mathbf{x}, \pi_n\mathbf{x})$$

où les $\pi_n : X^{\mathbb{N}} \to X$ sont les projections canoniques (ces bornes sont atteintes, puisque S est compact). Observons, en premier lieu, que

$$\forall \mathbf{x} \in S \quad \forall i, n \in \mathbb{N} \qquad d(x_i, x_{i+n}) \geqslant r_n$$

puisque S est stable par décalage. Comme X est compact, la suite (x_i) admet des valeurs d'adhérence (pour un quelconque $\mathbf{x} \in S$), et par conséquent

$$\liminf_{n\to\infty} r_n = 0. \tag{2.2}$$

Définissons maintenant

$$\mathcal{C} = \big\{n \geqslant n_0 : \forall k \in [n_0, n[\ \ r_k > r_n\big\}$$

l'ensemble des « temps de plus proche retour » à partir de n_0. Cet ensemble est non vide, puisqu'il contient n_0. J'affirme qu'il ne contient aucun entier $\geqslant 24n_0$.

Raisonnons par l'absurde, en supposant que $\mathcal{C}$ contient un entier $n \geqslant 24n_0$. On peut trouver $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots) \in S$ tel que $d(x_0, x_n) = r_n$. Posons alors

$$\alpha \;=\; \operatorname*{Inf}_{\substack{0\leqslant s<t<n\\ n_0\leqslant t-s\leqslant 3n/4}} d(x_s, x_t)$$