

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LES THÉORÈMES DE LERAY ET DE FUJITA-KATO POUR LE SYSTÈME DE BOUSSINESQ PARTIELLEMENT VISQUEUX

Raphaël Danchin & Marius Paicu

Tome 136

Fascicule 2

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 261-309

LES THÉORÈMES DE LERAY ET DE FUJITA-KATO POUR LE SYSTÈME DE BOUSSINESQ PARTIELLEMENT VISQUEUX

PAR RAPHAËL DANCHIN & MARIUS PAICU

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on étudie le système de Boussinesq décrivant le phénomène de convection dans un fluide incompressible et visqueux. Ce système est composé des équations de Navier-Stokes incompressibles avec un terme de force verticale dont l'amplitude est transportée *sans dissipation* par le flot du champ de vitesses.

On montre que les résultats classiques pour le système de Navier-Stokes standard demeurent vrais pour le système de Boussinesq bien qu'il n'y ait pas d'amortissement sur le terme de force.

Plus précisément, on établit l'existence de solutions faibles globales d'énergie finie en n'importe quelle dimension et l'existence de solutions fortes uniques globales en dimension $N \geq 3$ pour de petites données initiales. Dans le cas particulier de la dimension deux, les solutions d'énergie finie sont uniques pour n'importe quelle donnée initiale dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Texte reçu le 31 mai 2007, accepté le 17 juillet 2007

RAPHAËL DANCHIN, LAMA, UMR 8050, Université Paris-Est, 61 avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France • *E-mail* : danchin@univ-paris12.fr

MARIUS PAICU, Laboratoire de Mathématiques, Université Paris 11, bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail* : marius.paicu@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 35Q35, 76N10, 35B65, 76D99.

Mots clefs. — Système de Boussinesq, solutions faibles, estimations à pertes, régularité critique.

ABSTRACT (*The Leray and Fujita-Kato theorems for the Boussinesq system with partial viscosity*)

We are concerned with the so-called Boussinesq equations with partial viscosity. These equations consist of the ordinary incompressible Navier-Stokes equations with a forcing term which is transported *with no dissipation* by the velocity field. Such equations are simplified models for geophysics (in which case the forcing term is proportional either to the temperature, or to the salinity or to the density).

In the present paper, we show that the standard theorems for incompressible Navier-Stokes equations may be extended to Boussinesq system despite the fact that there is no dissipation or decay at large time for the forcing term.

More precisely, we state the global existence of finite energy weak solutions in any dimension, and global well-posedness in dimension $N \geq 3$ for small data. In the two-dimensional case, the finite energy global solutions are shown to be unique for any data in $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Introduction

Dans cet article, on étudie l'évolution d'un fluide incompressible visqueux soumis à une force verticale. On suppose que l'amplitude θ de cette force est transportée par le flot du champ de vitesses u du fluide. Le système de Boussinesq régissant l'évolution de (θ, u) s'écrit donc :

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta = 0 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla \Pi = \theta e_N \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

Les inconnues θ , u et Π dépendent du temps $t \geq 0$ et de la variable d'espace x . Pour s'abstraire des difficultés dues aux conditions aux limites, on suppose que le fluide remplit tout l'espace (donc x décrit $\mathbb{R}^N$ tout entier).

Le système (1) est un modèle simplifié courant pour l'évolution de fluides géophysiques (voir par exemple [27] ou [29]). Le champ de vecteurs u et le scalaire Π désignent alors respectivement la vitesse et la pression du fluide considéré et θ , une quantité scalaire⁽¹⁾ transportée par le fluide.

Pour avoir un modèle plus réaliste, il conviendrait de rajouter des termes de forces extérieures aux deux équations. Nous les supposons nuls pour simplifier la présentation. Notons au passage que dans le cas particulier où $\theta \equiv 0$, on retrouve le système de Navier-Stokes « classique ».

Les prémices de l'étude mathématique du système de Boussinesq sont relativement récentes et ne traduisent pas uniquement une préoccupation d'ordre

(1) Nous appellerons cette quantité « température » pour fixer les idées mais qui physiquement pourrait parfaitement être proportionnelle à la densité ou à la salinité.

physique. En réalité, l'engouement des mathématiciens pour ce modèle se limite essentiellement au cas de la dimension deux du fait d'une ressemblance formelle (dans le cas $\nu = 0$) avec le système d'Euler incompressible axisymétrique *avec swirl*. On peut montrer que l'apparition de singularités au temps T est liée à l'explosion simultanée de $\nabla\theta$ et du tourbillon dans $L^1(0, T; L^\infty)$ (voir [16]). Malheureusement, déterminer si ces quantités explosent effectivement semble au moins aussi difficile que répondre au problème similaire pour le système d'Euler incompressible en dimension 3.

Dans le cas $\nu > 0$ en revanche, les résultats obtenus sont nettement plus complets. Divers auteurs ont établi l'existence globale dans le cas $N = 2$ lorsque l'équation sur θ comporte en plus un terme de diffusion (voir [30] et les références qui s'y trouvent).

L'existence globale en dimension deux *sans condition de petitesse* demeure valable dans la situation qui nous intéresse où θ est transporté sans diffusion. Le cas de données régulières dans des espaces de Sobolev a été résolu (indépendamment) par T. Hou et C. Li dans [20], et par D. Chae dans [5]. Très récemment, H. Abidi et T. Hmidi ont établi dans [1] l'existence globale et unicité sans condition de petitesse pour des données initiales (θ_0, u_0) appartenant à un très gros sous-espace de $(L^2(\mathbb{R}^2))^3$. Comme on peut par ailleurs construire des solutions faibles globales *à la Leray* pour des données initiales θ_0 et u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ (voir par exemple [19]), il est raisonnable de penser que ces solutions « faibles » sont uniques.

Dans cet article, nous souhaitons montrer que trois des résultats mathématiques les plus célèbres pour le système de Navier-Stokes incompressible sont encore valables pour le système de Boussinesq (1), à savoir :

- l'existence de solutions faibles globales d'énergie finie en n'importe quelle dimension (théorème de Leray, voir [24]),
- l'unicité des solutions d'énergie finie en dimension deux (résultat figurant implicitement dans un autre article de J. Leray, voir [23], et démontré par J.-L. Lions et G. Prodi dans [25]),
- l'existence de solutions globales uniques pour des données petites en dimension $N \geq 3$ (théorème de Fujita-Kato [17]).

Nous verrons plus loin que la démonstration de l'existence globale de solutions faibles se fait en suivant la démarche originale de J. Leray : la présence de la température nécessite un peu d'attention mais n'introduit pas de difficulté majeure.

En revanche, pour démontrer l'unicité en dimension deux, l'approche naïve consistant à écrire le système vérifié par la différence de deux solutions semble vouée à l'échec. En effet, du fait de la présence d'une équation de transport dans le système, les estimations de stabilité ne peuvent être établies qu'avec perte

d'au moins une dérivée donc dans un espace à régularité *strictement négative*. Or, pour contrôler ce type de régularité, l'hypothèse que le champ de vitesses soit au moins lipschitzien semble inévitable. Mais le champ de vitesses construit n'est *a priori* que dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1)$.

Enfin, pour établir l'existence de solutions fortes globales en dimension $N \geq 3$, une application directe de l'approche de Fujita-Kato associant point fixe contractant et utilisation du semi-groupe de la chaleur ne saurait convenir. En effet, la méthode de Fujita-Kato exige non seulement une donnée initiale petite mais aussi un terme de force f qui soit intégrable en temps sur $\mathbb{R}_+$ entier, et d'intégrale petite. À moins que θ ne soit identiquement nulle, cette dernière condition n'est pas vérifiée par le terme de force θe_N puisque θ est transportée sans amortissement donc est constante le long des caractéristiques.

Nous avons adopté le plan suivant. La première section est consacrée à la présentation de nos résultats principaux. Dans la partie suivante, nous démontrons l'analogie du théorème de Leray pour le système de Boussinesq à l'aide d'arguments élémentaires d'analyse fonctionnelle. Dans la troisième section, nous présentons l'artillerie technique nécessaire pour venir à bout du reste de notre programme : espaces de Lorentz et de Besov, décomposition de Littlewood-Paley et calcul paradifférentiel. La quatrième partie regroupe diverses estimations *a priori* – dont certaines avec perte de régularité – pour l'équation de la chaleur ou de Stokes, l'équation de transport et le système de Navier-Stokes. Les résultats liés aux solutions fortes sont alors démontrés dans la cinquième partie, et l'unicité des solutions faibles d'énergie finie en dimension deux, dans la sixième partie. Nous avons regroupé en dernière section quelques résultats supplémentaires. Un lemme technique figure en appendice.

1. Résultats principaux

Avant d'énoncer notre résultat d'existence globale de solutions faibles, présentons brièvement les égalités d'énergie formelles associées au système.

Soit donc $(\theta, u, \nabla \Pi)$ une solution régulière et décroissante à l'infini du système de Boussinesq avec données (θ_0, u_0) . Tout d'abord, sachant que le champ de vitesses est à divergence nulle, on a

$$(2) \quad \|\theta(t)\|_{L^p} = \|\theta_0\|_{L^p} \quad \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } 1 \leq p \leq \infty.$$

Par ailleurs, en prenant le produit scalaire $L^2(\mathbb{R}^N)^N$ de l'équation de la vitesse avec u puis en intégrant en temps, on obtient

$$(3) \quad \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 d\tau = \|u_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \theta u_N dx d\tau.$$