Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FAISCEAUX l-ADIQUES ENTIERS SUR LES CORPS LOCAUX

Weizhe Zheng

Tome 136
Fascicule 3

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 465-503

Bull. Soc. math. France
136 (3), 2008, p. 465–503

SUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX l-ADIQUES ENTIERS SUR LES CORPS LOCAUX

PAR WEIZHE ZHENG

RÉSUMÉ. — On étudie le comportement des faisceaux l-adiques entiers sur les schémas de type fini sur un corps local par les six opérations et le foncteur des cycles proches.

ABSTRACT (*On the cohomology of integral l-adic sheaves over local fields*)
We study the behavior of integral l-adic sheaves on schemes of finite type over a local field under the six operations and the nearby cycle functor.

1. Introduction

Soient R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini de caractéristique p, K son corps des fractions. Un tel corps sera appelé *corps local*. Soit $\eta = \operatorname{Spec} K$.

Soit X un schéma de type fini sur η. On désigne par $|X|$ l'ensemble de ses points fermés. Pour $x \in |X|$, le corps résiduel $\kappa(x)$ de X en x est une extension finie de K. On note R_x son anneau des entiers, x_0 le point fermé de $\operatorname{Spec} R_x$. Soient $\bar{x}$ un point géométrique de X au-dessus de x de corps résiduel $\kappa(\bar{x})$ une clôture séparable de $\kappa(x)$, $R_{\bar{x}}$ la normalisation de R_x dans $\kappa(\bar{x})$, $\bar{x}_0$ le point

Texte reçu le 12 mars 2007, révisé le 4 septembre 2007

WEIZHE ZHENG, Université Paris-Sud 11, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France. • *E-mail :* `weizhe.zheng@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F20, 14G20, 11G25, 14D05.

Mots clefs. — Intégralité, cohomologie l-adique, cycles proches.

fermé de $\operatorname{Spec} R_{\bar{x}}$. Soit $F_x \in \mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x}_0)/\kappa(x_0))$ le Frobenius géométrique qui envoie a sur $a^{1/q}$, où $q = \sharp\kappa(x_0)$.

Fixons un nombre premier $l \neq p$. On désigne par $\overline{\mathbb{Q}_l}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_l$. Soit $\mathcal{F}$ un $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceau sur X. D'après le théorème de monodromie locale, les valeurs propres d'un relèvement $\Phi_x \in \mathrm{Gal}(\kappa(\bar{x})/\kappa(x))$ de F_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ sont bien définies à multiplication près par des racines de l'unité [5, 1.7.4].

Rappelons qu'on dit que $\mathcal{F}$ est *entier* [7, 0.1] si les valeurs propres de Φ_x sont des entiers algébriques pour tout $x \in |X|$. Cette intégralité est stable par image directe à support propre [*ibid.*, 0.2]. La démonstration utilise l'analogue de ce résultat sur un corps fini [22, XXI 5.2.2].

L'objet de cet article est d'étudier, plus généralement, le comportement de l'intégralité par les foncteurs usuels : les six opérations et le foncteur des cycles proches. De façon plus précise, on examine le comportement par ces foncteurs de la divisibilité des valeurs propres des Φ_x par des puissances de q. On introduit pour cela une mesure de la q-divisibilité inspirée des « jauges » de Mazur-Ogus. On prouve notamment les résultats espérés dans [13, 5.5].

Dans un travail ultérieur [19], on examine le comportement de la rationalité et de l'indépendance de l par les mêmes opérations.

Les résultats concernant les six opérations sont exposés au § 2. Au § 3 on traite le cas crucial de $Rj_*\mathcal{F}$, pour l'inclusion $j : U \to X$ du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux D dans un schéma X lisse sur η et d'un faisceau $\mathcal{F}$ lisse sur U et modérément ramifié le long de D. Les démonstrations des résultats du § 2 sont données au § 4. L'ingrédient essentiel est un théorème de de Jong, grâce auquel on se réduit au cas traité au § 3 par les techniques usuelles de descente cohomologique. Le résultat principal du § 5 est la stabilité de l'intégralité par le foncteur des cycles proches $R\Psi$. À nouveau, l'ingrédient clé est un théorème de de Jong, qui permet de se ramener au cas d'un couple strictement semi-stable et d'un faisceau lisse sur le complémentaire du diviseur D réunion de la fibre spéciale et des composantes horizontales et modérément ramifié le long de D. L'étude de ce cas, plus délicate qu'on ne pouvait s'y attendre, repose sur une compatibilité technique (5.6 (ii)) généralisant [11, 1.5 (a)]. Au § 6 on généralise la notion d'intégralité aux champs algébriques.

Je remercie chaleureusement L. Illusie pour m'avoir suggéré ce sujet, pour son aide à la composition de cet article, et pour sa lecture minutieuse des diverses versions du manuscrit. Je suis reconnaissant à G. Laumon pour une simplification de la démonstration de 5.6 (ii). Je remercie également O. Gabber, F. Orgogozo et le rapporteur pour leurs remarques et suggestions.

2. Intégralité et six opérations

On conserve les notations du § 1. On désigne par $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $r \in \mathbb{Q}$, on note q^r l'unique élément de $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}_{>0}$ vérifiant $(q^r)^b = q^a$, où $a, b \in \mathbb{Z}$ sont tel que $r = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$. Soit X un schéma de type fini sur η.

Définition 2.1. — Fixons un plongement $\iota : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}_l}$. On dit qu'un $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceau $\mathcal{F}$ sur X est *r-entier* (resp. *r-entier inverse*) si pour tout point fermé x de X, et toute valeur propre α de Φ_x agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$, $\alpha/\iota(q^r)$ (resp. $\iota(q^r)/\alpha$) est entier sur $\mathbb{Z}$, où $q = \sharp\kappa(x_0)$. Cette définition ne dépend pas des choix de Φ_x et de ι. On dit que $\mathcal{F}$ est *entier* (resp. *entier inverse*) s'il est 0-entier (resp. 0-entier inverse).

Les $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceaux entiers (resp. r-entiers, resp. entiers inverses, resp. r-entiers inverses) sur X forment une sous-catégorie épaisse [9, 1.11] de $\mathrm{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$, notée $\mathrm{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{\mathrm{ent}}$

$$(\text{resp. } \mathrm{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{r\text{-ent}}, \text{ resp. } \mathrm{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{\mathrm{ent}^{-1}}, \text{ resp. } \mathrm{Mod}_c(X, \overline{\mathbb{Q}_l})_{r\text{-ent}^{-1}}).$$

Soient K' une extension finie de K, Z un schéma de type fini sur K', $\mathcal{G} \in \mathrm{Mod}_c(Z, \overline{\mathbb{Q}_l})$. Alors $\mathcal{G}$ est r-entier (resp. r-entier inverse) relativement à K' si et seulement s'il est r-entier (resp. r-entier inverse) relativement à K.

Rappelons que pour les schémas X séparés de type fini sur un schéma S régulier de dimension ≤ 1, et en particulier sur η, on dispose, par [6, § 6], d'une catégorie triangulée $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ et d'un formalisme de six opérations : Rf_*, $Rf_!$, f^*, $Rf^!$, $\otimes$, $R\mathcal{H}om$. La catégorie $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est la 2-limite inductive des catégories $D_c^b(X, E_\lambda)$, où E_λ parcourt les extensions finies de $\mathbb{Q}_l$ contenues dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$. Si $\mathcal{O}_\lambda$ est l'anneau des entiers de E_λ, $D_c^b(X, E_\lambda)$ est déduite de la catégorie $D_c^b(X, \mathcal{O}_\lambda)$ définie dans [*ibid.*] par extension des scalaires de $\mathcal{O}_\lambda$ à E_λ. Le formalisme construit dans [*ibid.*] pour $D_c^b(-, \mathcal{O}_\lambda)$ se transpose trivialement.

Ce formalisme a un sens pour les schémas de type fini sur S (pas nécessairement séparés), et ce n'est que pour certaines opérations ($Rf_!$ et $Rf^!$) qu'on a besoin d'une hypothèse de séparation sur les morphismes. Pour un formalisme sans hypothèse de séparation, voir l'appendice (§ 6).

La définition qui suit est inspirée de la notion des « jauges » de Mazur-Ogus [2, 8.7].

Définition 2.2. — Soit $\epsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ une fonction. On dit qu'un objet $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est *entier* (resp. *ϵ-entier*, resp. *entier inverse*, resp. *ϵ-entier inverse*) si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^i(K)$ est entier (resp. $\epsilon(i)$-entier, resp. entier inverse, resp. $\epsilon(i)$-entier inverse).

On désigne la sous-catégorie pleine de $D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})$ formée des objets entiers (resp. ϵ-entiers, resp. entiers inverses, resp. ϵ-entiers inverses) par

$$D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{\text{ent}}\ (\text{resp. } D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{\epsilon\text{-ent}},\ \text{resp. } D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{\text{ent}^{-1}},\ \text{resp. } D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}).$$

Lorsque ϵ est constant, $D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{\epsilon\text{-ent}}$ et $D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{\epsilon\text{-ent}^{-1}}$ sont des sous-catégories triangulées. On abrège parfois $D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})$ en $D_c^b(X)$.

On note I la fonction d'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$.

2.3. — Soient r, r_1, $r_2 \in \mathbb{Q}$.

Pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}_c(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{r_1\text{-ent}}$, $\mathcal{G} \in \mathrm{Mod}_c(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{r_2\text{-ent}}$, on a

$$\mathcal{F}\otimes\mathcal{G} \in \mathrm{Mod}_c(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{(r_1+r_2)\text{-ent}}.$$

Pour $K \in D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{(rI+r_1)\text{-ent}}$, $L \in D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{(rI+r_2)\text{-ent}}$, on a

$$K\otimes L \in D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{(rI+r_1+r_2)\text{-ent}}.$$

De même pour « entier inverse ».

Pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}_c(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{r_1\text{-ent}^{-1}}$ lisse, $\mathcal{G} \in \mathrm{Mod}_c(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{r_2\text{-ent}}$, on a

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G}) \in \mathrm{Mod}_c(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{(r_2-r_1)\text{-ent}}.$$

Pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}_c(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{r_1\text{-ent}}$ lisse, $\mathcal{G} \in \mathrm{Mod}_c(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{r_2\text{-ent}^{-1}}$, on a

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G}) \in \mathrm{Mod}_c(X,\overline{\mathbb{Q}_l})_{(r_2-r_1)\text{-ent}^{-1}}.$$

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas de type fini sur η. Alors f^* préserve les complexes ϵ-entiers (resp. ϵ-entiers inverses).

THÉORÈME 2.4. — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme séparé de schémas de type fini sur η, $\mathcal{F}$ un $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceau entier (resp. entier inverse) sur X. Alors pour tout point fermé y de Y, $(Rf_!\mathcal{F})_y$ est entier et $(I-n)$-entier (resp. I-entier inverse et n-entier inverse), où $n = \dim(f^{-1}(y))$. En particulier, $Rf_!$ induit*

$$D_c^b(X)_{\text{ent}} \to D_c^b(Y)_{\text{ent}}, \tag{2.4.1}$$

$$D_c^b(X)_{I\text{-ent}} \to D_c^b(Y)_{(I-d_r)\text{-ent}}, \tag{2.4.2}$$

$$D_c^b(X)_{I\text{-ent}^{-1}} \to D_c^b(Y)_{I\text{-ent}^{-1}}, \tag{2.4.3}$$

$$D_c^b(X)_{\text{ent}^{-1}} \to D_c^b(Y)_{d_r\text{-ent}^{-1}}, \tag{2.4.4}$$

où $d_r = \max_{y\in|Y|}\dim f^{-1}(y)$ est la dimension relative.

Le cas « entier » ((2.4.1) et (2.4.2)) de 2.4 est un théorème de Deligne-Esnault [7, 0.2].