Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LAGRANGIAN FIBRATIONS ON GENERALIZED KUMMER VARIETIES

Anne Duval & Julien Roques

Tome 136
Fascicule 1

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 67-96

Bull. Soc. math. France
136 (1), 2008, p. 67–96

FAMILLES FUCHSIENNES D'ÉQUATIONS AUX (q-)DIFFÉRENCES ET CONFLUENCE

PAR ANNE DUVAL & JULIEN ROQUES

RÉSUMÉ. — On commence par présenter une méthode de résolution d'une famille de systèmes fuchsiens d'opérateurs de pseudo-dérivations associées à une famille à deux paramètres d'homographies, qui unifie et généralise les cas connus des systèmes différentiels, aux différences ou aux q-différences. Nous traitons ensuite dans cette famille des problèmes de confluence que l'on peut voir comme des problèmes de continuité en ces deux paramètres.

ABSTRACT (*Fuchsian families of equations*). — In a first part, we give a method for solving a family of Fuchsian systems of operators of pseudo-derivations associated to a family of homographies with two parameters which unify and generalize the differential, the difference and the q-difference cases. In a second part, we study the problems of confluence related to these families.

Texte reçu le 4 août 2006, révisé le 7 mai 2007 et le 5 octobre 2007

ANNE DUVAL, Université de Lille 1, UFR de Mathématiques Pures et Appliquées, Bâtiment M2, Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex • *E-mail :* `Anne.Duval@univ-lille1.fr`
JULIEN ROQUES, Laboratoire Émile Picard, Université Paul Sabatier, U.F.R. M.I.G., 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France • *E-mail :* `roques@picard.ups-tlse.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 39A13, 41A58, 65Q05.

Mots clefs. — Équations fonctionnelles, fonctions spéciales, confluence, séries de (q-)factorielles.

1. Introduction

1.1. Problématique. — L'étude locale des trois types de systèmes linéaires

1) différentiel : $Y'(x) = A(x)Y(x)$,
2) aux q-différences : $Y(qx) = A(x)Y(x)$,
   où q est un nombre complexe non nul de module différent de 1,
3) aux différences : $Y(x-1) = A(x)Y(x)$,

où x est une variable complexe et $A(x)$ une matrice de fonctions, fait apparaître de grandes similitudes. Nous nous restreindrons dans ce qui suit à l'étude locale de ces systèmes au voisinage de l'infini qui est le seul point fixe, sur la sphère de Riemann, de la translation $x \mapsto x-1$ et l'un des deux points fixes de l'homographie $x \mapsto qx$.

Une matrice $T(x)$ inversible au voisinage de l'infini définit une « transformation de jauge », c'est-à-dire associe à la matrice $A(x)$ la matrice $B(x)$ du système que vérifie $X(x) = T(x)Y(x)$ lorsque $Y(x)$ vérifie le système de matrice $A(x)$. On a :

1) $B(x) = T(x)^{-1}A(x)T(x) - T(x)^{-1}T'(x)$ dans le cas différentiel,
2) $B(x) = T(qx)^{-1}A(x)T(x)$ dans le cas des q-différences,
3) $B(x) = T(x-1)^{-1}A(x)T(x)$ dans le cas des différences.

Énonçons quelques résultats sous une forme faisant ressortir le parallélisme.

1) Supposons que $A(x)$ est la somme d'une série $\sum_{s\geq 0} A_s x^{-s-1}$, à coefficients dans l'anneau $M_n(\mathbb{C})$ des matrices constantes de dimension $n\times n$, convergente dans un voisinage de l'infini. Le système différentiel de matrice $A(x)$ est fuchsien. Il est en outre non résonnant si deux valeurs propres distinctes de la matrice A_0 ont une différence non entière. Dans ce cas, il existe une (unique) transformation de jauge tangente à l'identité donnée par une série

$$T(x) = I + \sum_{s\geq 1} T_s x^{-s}$$

convergente au voisinage de l'infini, telle que $B(x) = A_0 x^{-1}$.

2) Supposons que $A(x)$ est la somme d'une série $\sum_{s\geq 0} A_s x^{-s}$, à coefficients dans l'anneau $M_n(\mathbb{C})$ des matrices constantes de dimension $n\times n$, convergente dans un voisinage de l'infini, avec A_0 inversible. Le système aux q-différences de matrice $A(x)$ est fuchsien. Il est non résonnant si deux valeurs propres distinctes de A_0 ne sont pas congrues modulo $q^{\mathbb{Z}}$ et dans ce cas une (unique) transformation de jauge tangente à l'identité le transforme en le système de matrice constante A_0, (voir [10, p. 1033] où le problème est traité au voisinage de 0 ; on s'y ramène par le changement de variable $x \leftarrow 1/x$).

3) Afin d'obtenir des résultats analogues pour les sytèmes aux différences, il convient de remplacer les séries de puissances par les « séries de factorielles ». On suppose

$$A(x) = I + \sum_{s\geq 0} A_s \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+s)}\cdot$$

Le domaine naturel de convergence d'une telle série est un demi-plan vertical $\operatorname{Re} x \gg 0$ que l'on peut considérer comme un voisinage de $+\infty$. Comme dans le cas différentiel, le système est dit non résonnant si deux valeurs propres distinctes de A_0 ne sont pas congrues modulo $\mathbb{Z}$. Dans ce cas il existe une (unique) transformation de jauge tangente à l'identité donnée par une série de factorielles convergente $T(x) = I + \sum_{s\geq 0} T_s/x(x+1)\cdots(x+s)$ telle que $B(x) = I - A_0/(x-1)$. Remarquons que le système aux différences défini par $B(x)$ peut s'écrire

$$(x-1)\bigl[Y(x) - Y(x-1)\bigr] = A_0 Y(x).$$

Dans chaque cas, résoudre le sytème revient alors à résoudre un système à coefficients constants, ce qui se fait en réduisant cette matrice sous forme normale de Jordan puis en introduisant une famille de « caractères » et de « logarithmes » adaptés à chaque cas.

Par ailleurs ces trois familles de systèmes sont reliées entre elles par des propriétés de « confluence ». En effet en notant σ_q (resp. τ_h) l'opérateur agissant sur une fonction f par $\sigma_q f(x) = f(qx)$ (resp. $\tau_h f(x) = f(x+h)$), on a

$$\lim_{q\to 1} \frac{\sigma_q - \mathrm{id}}{(q-1)x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\tau_h - \mathrm{id}}{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot$$

L'étude de ces confluences, en liaison avec la théorie de Galois, a été menée récemment par J. Sauloy [10] pour la première famille et par le second auteur [8] pour la seconde. Ces deux auteurs montrent comment réaliser les deux étapes (transformation de jauge pour se ramener au cas constant et détermination d'un système fondamental de solutions dans le cas constant) d'une façon suffisamment canonique pour qu'un passage à la limite soit possible. Dans le premier cas le paramètre complexe q est de module strictement plus grand que 1 et tend vers 1 le long d'une spirale logarithmique : $q = q_0^{\varepsilon}$ où $|q_0| > 1$ et ε est un réel positif que l'on fait tendre vers 0. Dans le second cas h est réel positif et tend vers 0.

Un autre type de confluence a été considéré par le premier auteur dans [3] : on part de la famille d'opérateurs définis par $\sigma_{q,1} f(x) = f(qx+1)$ et on étudie la convergence $\lim_{q\to 1} \sigma_{q,1} = \tau_1$ notée τ. Il s'agit cette fois d'un phénomène de confluence d'opérateurs associés à une famille d'homographies à deux points fixes confluant vers une homographie à un point fixe. Rappelons le fait bien connu que tout système $Y(\psi(x)) = A(x)Y(x)$ où ψ est une homographie de la sphère de Riemann distincte de l'identité, se ramène par changement de variable homographique soit à un système aux q-différences (si ψ a deux points fixes) soit à un système aux différences (si ψ a un point fixe). Ainsi le système $Y(qx+1) = A_q(x)Y(x)$ devient un système aux q-différences si on effectue le changement de variable $x \mapsto (q-1)x+1$. Au niveau de l'opérateur, la confluence précédente est seulement une spécialisation en $q = 1$, mais cette spécialisation n'est pas possible dans les solutions obtenues par le changement de variable indiqué. Dans l'article cité l'étude de cette confluence est faite en remarquant qu'il est possible d'exprimer toute série convergente à l'infini en une série de la forme $a_0 + \sum_{s\geq 1} a_s/(x;q)_s$ où $(x;q)_s = \prod_{j=0}^{s-1}(1 - q^j x)$ (voir [2, p. 344]). En supposant que q est réel et tend vers 1 par valeurs supérieures, on montre dans [3] qu'après une telle écriture suivie du changement de variable indiqué, les solutions obtenues tendent vers celles du système aux différences limite.

Dans le présent travail, nous généralisons et unifions ces trois articles en considérant une famille de systèmes associés à la famille d'opérateurs $\sigma_{q,h} f(x) = f(qx + h)$. Nous montrons qu'il est possible, sous certaines hypothèses, de définir une solution canonique pour le système

$$Y(qx + h) = A^{(q,h)}(x)Y(x).$$

Celle-ci est obtenue en résolvant chaque système de la famille en les deux étapes indiquées : par une transformation de jauge tangente à l'identité définie par une série appropriée (séries de (q, h)-factorielles) convergente dans un domaine convenable, on se ramène au cas d'un système à coefficients constants que l'on résout à l'aide d'une famille adaptée de fonctions. De plus ces deux étapes sont menées en contrôlant la dépendance en (q, h). Cette étude aboutit au résultat énoncé dans le théorème 1, section 1.3. On étudie ensuite les trois types de confluence : $(q, h) \to (q_0, 0)$ $(q_0 > 1)$, $(q, h) \to (1, h_0)$ $(h_0 > 0)$ et $(q, h) \to (1, 0)$. Les conclusions obtenues sont l'objet du théorème 2, section 1.3.

Indiquons le plan de l'article. Après avoir donné les définitions et notations utiles, nous énonçons les deux théorèmes principaux de notre article. Un premier paragraphe étudie les séries de (q, h)-factorielles. Chacun des deux paragraphes suivants est consacré à la preuve de l'un des théorèmes.

1.2. Notations. — Dans tout ce travail q est un *réel supérieur ou égal à* 1 dont l'inverse est noté p et h est un *réel positif ou nul.*

Rappelons, pour $q \neq 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, la notation de Jackson

$$[\lambda]_q = \frac{q^\lambda - 1}{q - 1},$$

que l'on étend au cas $q = 1$ par $[\lambda]_1 = \lambda$. On pose

$${}_h[\lambda]_q = h[\lambda]_q.$$