Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES MULTIPLES ET POLYZÊTAS

J. Cresson & S. Fischler & T. Rivoal

Tome 136
Fascicule 1

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 97-145

Bull. Soc. math. France
136 (1), 2008, p. 97–145

SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES MULTIPLES ET POLYZÊTAS

PAR J. CRESSON, S. FISCHLER & T. RIVOAL

RÉSUMÉ. — Nous décrivons un algorithme théorique et effectif permettant de démontrer que des séries et intégrales hypergéométriques multiples relativement générales se décomposent en combinaisons linéaires à coefficients rationnels de polyzêtas.

ABSTRACT (*Multiple hypergeometric series and polyzetas*). — We describe a theoretical and effective algorithm which enables us to prove that rather general hypergeometric series and integrals can be decomposed as linear combinations of multiple zeta values, with rational coefficients.

1. Introduction

Une généralisation de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est donnée par les séries *polyzêtas*, définies pour tout entier $p \geq 1$ et tout p-uplet $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$

Texte reçu le 12 septembre 2006, accepté le 15 décembre 2006

J. CRESSON, Laboratoire de Mathématiques appliquées de Pau, Bâtiment I.P.R.A, Université de Pau et des Pays de l'Adour, av. de l'Université, BP 1155, 64013 Pau Cedex (France).
S. FISCHLER, Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 8628, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex (France).
T. RIVOAL, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex (France).

Classification mathématique par sujets (2000). — 33C70, 11M41, 11M06, 11J72.

Mots clefs. — Polyzêta, série hypergéométrique multiple, algorithme.

d'entiers ≥ 1, avec $s_1 \geq 2$, par

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_p) = \sum_{k_1 > k_2 > \cdots > k_p \geq 1} \frac{1}{k_1^{s_1} k_2^{s_2} \cdots k_p^{s_p}}.$$

Les entiers p et $s_1 + s_2 + \cdots + s_p$ sont respectivement la profondeur et le poids de $\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_p)$; pour $p = 0$, on pose

$$\zeta(\varnothing) = 1.$$

Pour diverses raisons, il est plus simple de considérer que la sommation est faite sur $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_p \geq 1$: nous noterons $\bar{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ les séries ainsi obtenues. Il est à noter que les deux séries convergent plus généralement pour des exposants complexes vérifiant $\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Re}(s_j) > r$ pour tout $r \in \{1, \ldots, p\}$, ce qui autorise à avoir des exposants entiers négatifs par exemple.

Les polyzêtas interviendront dans cet article par l'intermédiaire des fonctions polylogarithmes multiples, définies pour $|z_1| \leq 1, \ldots, |z_p| \leq 1$ par

$$\mathrm{Li}_{s_1, s_2 \ldots, s_p}(z_1, z_2, \ldots, z_p) = \sum_{k_1 > k_2 > \cdots > k_p \geq 1} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_p^{k_p}}{k_1^{s_1} k_2^{s_2} \cdots k_p^{s_p}}.$$

On obtiendra en fait les résultats pour les polylogarithmes multiples larges, définis par

$$\mathrm{La}_{s_1, s_2 \ldots, s_p}(z_1, z_2 \ldots, z_p) = \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} \frac{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_p^{k_p}}{k_1^{s_1} k_2^{s_2} \cdots k_p^{s_p}}$$

et notés « Le » par Ulanskiĭ et Zlobin. Lorsque $p = 1$, les deux variantes coïncident avec les polylogarithmes usuels et si $z_1 = z_2 = \cdots = z_p = 1$ et $s_1 \geq 2$, on a

$$\mathrm{Li}_{s_1, s_2 \ldots, s_p}(1, 1, \ldots, 1) = \zeta(s_1, s_2 \ldots, s_p),$$

$$\mathrm{La}_{s_1, s_2 \ldots, s_p}(1, 1, \ldots, 1) = \bar{\zeta}(s_1, s_2 \ldots, s_p).$$

Un théorème d'Ulanskiĭ [40] permet de passer linéairement d'un type de série à l'autre ; en vue d'applications diophantiennes, on ne perd donc rien à considérer une variante plutôt qu'une autre.

Remarquons dès à présent que les fonctions polylogarithmes multiples peuvent être définies pour des exposants s_i complexes, à condition de supposer en plus que $|z_1| < 1$ pour des raisons de convergence. En particulier, nous utiliserons ces fonctions avec des $s_j \in \mathbb{Z}$: par définition, le poids d'une telle fonction est alors $\sum_{j=1}^{p} \max(s_j, 0)$.

On voit naturellement apparaître les polyzêtas lorsque, par exemple, on considère les produits des valeurs de la fonction zêta : on a

$$\zeta(n)\zeta(m) = \zeta(n+m) + \zeta(n, m) + \zeta(m, n),$$

ce qui permet en quelque sorte de « linéariser » ces produits. En dehors de quelques identités telles que $\zeta(2,1)=\zeta(3)$ (due à Euler), la nature arithmétique de ces séries est aussi peu connue que celle des nombres $\zeta(s)$. Cependant, l'ensemble des nombres $\zeta(\underline{s})$ possède une très riche structure algébrique assez bien comprise, au moins conjecturalement (voir [42]). Par exemple, on peut s'intéresser aux $\mathbb{Q}$-sous-espaces vectoriels $\mathcal{Z}_p$ de $\mathbb{R}$, engendrés par les 2^{p-2} polyzêtas de poids $p\geq 2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_2 &= \mathbb{Q}\zeta(2),\\ \mathcal{Z}_3 &= \mathbb{Q}\zeta(3)+\mathbb{Q}\zeta(2,1),\\ \mathcal{Z}_4 &= \mathbb{Q}\zeta(4)+\mathbb{Q}\zeta(3,1)+\mathbb{Q}\zeta(2,2)+\mathbb{Q}\zeta(2,1,1),\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Posons $v_p=\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_p)$. On a alors la

Conjecture 1.1. — (i) *Pour tout entier $p\geq 2$, on a $v_p=c_p$, où l'entier c_p est défini par la récurrence de type Fibonacci*

$$c_{p+3}=c_{p+1}+c_p,\quad \textit{avec}\quad c_0=1,\ c_1=0,\ c_2=1.$$

(ii) *Les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{Z}_p$ $(p\geq 2)$, sont en somme directe.*

La suite $(v_p)_{p\geq 2}$ devrait donc croître comme α^p (où $\alpha\approx 1,3247$ est racine du polynôme X^3-X-1), ce qui est bien plus petit que 2^{p-2}. Il y a donc conjecturalement beaucoup de relations linéaires entre les polyzêtas de même poids et aucune en poids différents : dans cette direction, un théorème de Goncharov [19] et Terasoma [39] affirme que l'on a $v_p\leq c_p$ pour tout entier $p\geq 2$. Il reste donc à montrer l'inégalité inverse pour montrer (i) mais aucune minoration non triviale de v_p n'est connue à ce jour : si l'on montre facilement que $v_2=v_3=v_4=1$, on est bloqué dès l'égalité $v_5=2$, qui est équivalente à l'irrationalité toujours inconnue de $\zeta(5)/(\zeta(3)\zeta(2))$. Plus généralement, un des intérêts de la conjecture 1.1 est d'impliquer la suivante.

Conjecture 1.2. — *Les nombres π, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, etc. sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Cette conjecture semble actuellement totalement hors de portée. Un certain nombre de résultats diophantiens ont néanmoins été obtenus en profondeur 1, c'est-à-dire dans le cas de la fonction zêta de Riemann :

(i) Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel (Apéry [3]) ;

(ii) La dimension de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5),\ldots,$ $\zeta(A)$ (avec A impair) croît au moins comme $\log(A)$ (cf. [5], [33]) ;

(iii) Au moins un des quatre nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ est irrationnel (Zudilin [49]).

Ces résultats peuvent être obtenus par l'étude de certaines séries de la forme [(1)]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{k^A(k+1)^A\cdots(k+n)^A}\, z^{-k} \tag{1.1}$$

avec $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$, $n \geq 0$, $A \geq 1$ et $|z| \geq 1$ (le choix de z^{-1} plutôt que z est purement technique) : nous rappelons sommairement au paragraphe 3.1 comment on utilise ces séries pour les démontrer, en exploitant le fait que, génériquement, elles s'expriment aussi comme combinaisons linéaires des valeurs de zêta aux entiers lorsque $z = 1$. Les divers choix de P conduisent à des *séries hypergéométriques généralisées* : voir les ouvrages [4], [34] pour les définitions, qui ne sont pas essentielles ici.

Notre but est de poser les bases d'une généralisation de cette méthode hypergéométrique en profondeur quelconque en considérant *a priori* des séries multiples de la forme

$$\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 1} \frac{P(k_1,\ldots,k_p)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1}\cdots(k_p)_{n_p+1}^{A_p}}\, z_1^{-k_1}\cdots z_p^{-k_p}, \tag{1.2}$$

avec $P(X_1,\ldots,X_p) \in \mathbb{Q}[X_1,\ldots,X_p]$, des entiers $A_j \geq 1$ et $n_j \geq 0$ et $|z_1| \geq 1,\ldots,|z_p| \geq 1$, ceci dans l'espoir qu'elles s'expriment comme combinaisons linéaires de polyzêtas intéressants lorsque $z_1 = \cdots = z_p = 1$. Pour raccourcir les expressions, on a utilisé le symbole de Pochhammer

$$(\alpha)_m = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1).$$

On pourrait imaginer généraliser encore (1.2) en remplaçant, au dénominateur, chaque facteur $(k_i)_{n_i+1}^{A_i}$ par $(k_i+r_i)_{n_i+1}^{A_i}$. Cela peut être utile (et nos méthodes le permettent) si des bornes explicites apparaissent en fonction des n_i, mais c'est inutile pour des résultats qualitatifs car on peut s'y ramener, en remplaçant n_i par $n_i + r_i$ et en multipliant le numérateur par $(k_i)_{r_i}^{A_i}$.

Les séries de la forme (1.2) apparaissent naturellement dans la littérature. Par exemple, Sorokin [36] a déduit l'irrationalité de $\zeta(3)$ d'un résultat que l'on peut écrire ainsi (voir §2.2) : pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$n! \sum_{k_1\geq k_2\geq 1} \frac{(k_2-n)_n(k_1-k_2+1)_n}{(k_1)_{n+1}^2(k_2)_{n+1}} = 2a_n\zeta(2,1) - b_n, \tag{1.3}$$

(1) Du moins, dans le cas de (i) et (ii) ; le point (iii) nécessite une idée *a priori* différente (série « dérivée ») mais on peut l'intégrer dans le cadre fourni par (1.1). Voir un peu plus loin dans cette introduction pour plus de détails.