Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COMPARAISON ENTRE COHOMOLOGIE CRISTALLINE ET COHOMOLOGIE ÉTALE p-ADIQUE SUR CERTAINES VARIÉTÉS DE SHIMURA

Sandra Rozensztajn

Tome 137
Fascicule 3

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 297-320

Bull. Soc. math. France
137 (3), 2009, p. 297–320

COMPARAISON ENTRE COHOMOLOGIE CRISTALLINE ET COHOMOLOGIE ÉTALE p-ADIQUE SUR CERTAINES VARIÉTÉS DE SHIMURA

PAR SANDRA ROZENSZTAJN

RÉSUMÉ. — Soit X un modèle entier en un premier p d'une variété de Shimura de type PEL, ayant bonne réduction associée à un groupe réductif G. On peut associer aux $\mathbb{Z}_p$-représentations du groupe G deux types de faisceaux : des cristaux sur la fibre spéciale de X, et des systèmes locaux pour la topologie étale sur la fibre générique. Nous établissons un théorème de comparaison entre la cohomologie de ces deux types de faisceaux.

ABSTRACT (*Comparison between crystalline cohomology and p-adic étale cohomology on certain Shimura varieties*)

Let X be an integral model at a prime p of a Shimura variety of PEL type having good reduction, associated to a reductive group G. To $\mathbb{Z}_p$ representations of the group G can be associated two kinds of sheaves: crystals on the special fiber of X, and locally constant étale sheaves on the generic fiber. We establish a comparison between the cohomology of these two kinds of sheaves.

Introduction

L'objet de cet article est de montrer comment des théorèmes de comparaison « classiques » (c'est-à-dire pour la cohomologie à valeur dans des faisceaux

Texte reçu le 27 avril 2007, révisé le 19 décembre 2008, accepté le 2 mars 2009

SANDRA ROZENSZTAJN, Université de Lyon, UMPA, ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France • *E-mail :* rozenszt@umpa.ens-lyon.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G35,14F30,14F20.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, Théorie de Hodge p-adique.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2009/297/$ 5.00

constants) peuvent être utilisés pour montrer des théorèmes de comparaison pour certains faisceaux sur des variétés de Shimura.

Considérons X un modèle entier d'une variété de Shimura de type PEL, défini sur une extension de $\mathbb{Z}_p$. Cette variété de Shimura correspond à un groupe réductif G, défini sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. On peut associer aux $\mathbb{Z}_{(p)}$-représentations du groupe G différents faisceaux : des systèmes locaux en $\mathbb{Z}_p$-modules sur la fibre générique de X, et des cristaux sur sa fibre spéciale.

La théorie de Hodge p-adique nous fournit des théorèmes de comparaison entre cohomologie étale p-adique et log-cristalline dans le cas des coefficients constants, pour des schémas propres et possédant certaines propriétés de lissité. Ces résultats sont dûs entre autres à Tsuji ([15]) pour le cas où l'on considère les groupes de cohomologie après tensorisation par $\mathbb{Q}_p$, et à Tsuji et Breuil pour le cas où l'on tient compte de la torsion ([16] et [2]). Dans ce dernier cas, il y a alors des restrictions essentielles sur le degré des groupes de cohomologie que l'on peut comparer. Ces théorèmes sont rappelés dans le paragraphe 5.1.

Nous utilisons ces théorèmes pour démontrer des théorèmes de comparaison entre la cohomologie étale du système local associé à une représentation V du groupe G, et la cohomologie log-cristalline d'une extension du cristal associé à V à une compactification appropriée de X.

Le principe de notre méthode est de considérer la cohomologie à coefficients constants de la variété abélienne universelle sur X et de ses puissances, et d'en déduire la comparaison qui nous intéresse en découpant les groupes de cohomologie des faisceaux considérés dans les groupes de cohomologie à coefficients constants à l'aide de certaines correspondances algébriques. Afin de mener à bien cette stratégie, nous avons besoin de plusieurs ingrédients :

1. l'existence de bonnes compactifications de X et de certaines variétés de Kuga-Sato ;
2. des théorèmes de comparaison appropriés en théorie de Hodge p-adique ;
3. une manière de travailler efficacement avec les faisceaux associés à la représentation V.

Concernant le premier point : les théorèmes de comparaison dont on a besoin n'étant valables que sur des schémas propres, nous devons supposer l'existence (prouvée dans certains cas seulement) de compactifications non seulement de X, mais aussi des variétés de Kuga-Sato, et plus précisément un système projectif de telles compactifications. La partie 1 explique précisément dans quelle situation nous nous plaçons, ainsi que les propriétés des compactifications que nous utilisons.

Concernant le deuxième point : la restriction (essentielle) sur le degré des groupes de cohomologie que l'on peut comparer impose des restrictions sur les représentations V auxquelles on peut appliquer notre méthode ainsi que sur le degré de la cohomologie que l'on considère.

Concernant le troisième point : nous devons nous restreindre aux représentations de G qui donnent lieu à des faisceaux dont la cohomologie peut être découpée par des correspondances algébriques dans la cohomologie de la variété abélienne universelle. Ceci nous amène à définir dans la partie 2 la notion de représentation *atteignable*. Cette partie utilise de manière essentielle la structure des représentations du groupe réductif G, ce qui explique que l'on soit obligé de faire une description au cas par cas. Nous détaillons dans cette partie le cas des groupes unitaires et le cas Siegel.

Le plan de l'article est dès lors assez naturel. Dans la partie 1, nous donnons des rappels sur les variétés de Shimura de type PEL et nous expliquons quelles sont les compactifications dont on a besoin, et lesquelles sont connues. Dans la partie 2, nous définissons ce que sont les représentations atteignables de G. Nous expliquons ensuite dans la partie 3 l'action des correspondances algébriques ainsi que la construction des faisceaux associés aux représentations de G. Dans la partie 4, nous montrons que les groupes de cohomologie des faisceaux que l'on a construits sont munis des structures habituelles (frobenius, filtration, ...). Enfin, la partie 5 contient l'énoncé précis et la démonstration des théorèmes que l'on obtient (ce sont les théorèmes 5.3 et 5.4). C'est ici qu'apparaît une différence entre les cas unitaire et Siegel : en effet le point-clé de la preuve est la compatibilité de l'action des correspondances algébriques que nous considérons avec les théorèmes de comparaison à coefficients constants. Pour certaines représentations dans le cas Siegel, on utilise la compatibilité de cet isomorphisme de comparaison avec les structures produit sur les groupes de cohomologie, ce qui n'est démontré que dans le cas rationnel et non dans le cas de torsion. Dans le cas unitaire et pour les autres représentations dans le cas Siegel, on n'utilise pas la structure produit et on obtient un résultat qui tient compte de la torsion.

L'intérêt de cette comparaison est qu'il est possible d'obtenir des renseignements sur le côté cristallin : des techniques de type complexe BGG, décrites par exemple dans le chapitre VI de [4] permettent d'avoir des renseignements sur la filtration de Hodge. On en déduit alors des informations sur le côté étale, vu comme représentation galoisienne.

1. Les variétés considérées

1.1. Variétés de Shimura de type PEL

1.1.1. *Les données*

On se donne B une $\mathbb{Q}$-algèbre simple finie, munie d'une involution positive notée $*$ (c'est-à-dire que $\mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xx^*) > 0$ pour tout x non nul de B), $\mathfrak{V}$ un module de type fini sur B, muni d'une forme bilinéaire $(,)$ telle que pour tous v et w dans $\mathfrak{V}$, et tout b dans B on ait $(bv, w) = (v, b^*w)$. On notera $2g$ la dimension de $\mathfrak{V}$ sur $\mathbb{Q}$.

On fixe dans toute la suite un nombre premier p, et on fera l'hypothèse que $p > 2g$. Le rôle de cette hypothèse est expliqué au paragraphe 3.3.1.

On suppose que B est non ramifié en p, c'est-à-dire que $B_{\mathbb{Q}_p}$ est un produit d'algèbres de matrices sur des extensions non-ramifiées de $\mathbb{Q}_p$.

On se donne un $\mathbb{Z}_{(p)}$-ordre $\mathcal{O}_B$ dans B qui devient un ordre maximal de $B_{\mathbb{Q}_p}$ après tensorisation par $\mathbb{Z}_p$, et stable par l'involution de B.

On se donne aussi $\mathcal{V}$ un $\mathcal{O}_B$-réseau de $\mathfrak{V}$ autodual. Le fait que $\mathcal{V}$ soit autodual implique en particulier que la forme bilinéaire induite sur $\mathcal{V}$ est non dégénérée.

Soit C l'anneau des endomorphismes B-linéaires de $\mathfrak{V}$.

On définit le groupe G par $G(R) = \{g \in (C \otimes R)^*, \exists \mu \in R^*, \forall v, w \in \mathfrak{V} \otimes R, (gv, gw) = \mu(v, w)\}$, pour toute $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre R.

On se donne un $\mathbb{R}$-homomorphisme d'algèbres $h : \mathbb{C} \to C_\infty = C \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ tel que $h(z)^* = h(\bar{z})$, et la forme $(v, h(i)w)$ soit définie positive sur $\mathfrak{V}_\infty = \mathfrak{V} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. On associe à h le morphisme $\mu_h : \mathbb{C}^* \to G_{\mathbb{C}}$, qui définit la filtration de Hodge sur $\mathfrak{V}_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire la décomposition $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_z \oplus \mathfrak{V}_1$, où $\mu_h(z)$ agit par z sur $\mathfrak{V}_z$ et par 1 sur $\mathfrak{V}_1$.

Le corps dual associé à ces données est le corps $E(G, h)$ qui est le corps de définition de la classe d'isomorphisme de $\mathfrak{V}_z$ comme B-représentation. C'est le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les $\mathrm{tr}(b), b \in B$ agissant sur $\mathfrak{V}_z$.

1.1.2. *Deux cas particuliers*

Dans la suite nous nous intéresserons uniquement à deux cas particuliers : le cas Siegel et le cas unitaire. Le cas Siegel correspond à la situation où B est réduit à $\mathbb{Q}$. La variété de Shimura associée est alors la variété modulaire de Siegel. Le cas unitaire correspond au cas où B est une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$. La forme alternée $(,)$ est alors la partie imaginaire d'une forme hermitienne sur $\mathfrak{V}$, qu'on peut voir comme un B-espace vectoriel de dimension moitié.

1.1.3. *Le problème de modules*

On peut associer aux données de Shimura précédentes un problème de modules, tel que décrit dans [10], dont on rappelle ici l'essentiel.