Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

$\mathcal{D}$-MODULES ARITHMÉTIQUES ASSOCIÉS AUX ISOCRISTAUX SURCONVERGENTS. CAS LISSE

Daniel Caro

Tome 137
Fascicule 4

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 453-543

Bull. Soc. math. France
137 (4), 2009, p. 453–543

$\mathcal{D}$-MODULES ARITHMÉTIQUES ASSOCIÉS AUX ISOCRISTAUX SURCONVERGENTS. CAS LISSE

PAR DANIEL CARO

RÉSUMÉ. — Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, P sa fibre spéciale, X un sous-schéma fermé de P, T un diviseur de P tel que $T_X = T \cap X$ soit un diviseur de X et $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ le complété faible du faisceau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{P}$ à singularités surconvergentes le long de T tensorisé par $\mathbb{Q}$. Nous construisons un foncteur pleinement fidèle, noté $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$, de la catégorie des isocristaux sur $X \setminus T_X$ surconvergents le long de T_X dans celle des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans X. Puis, nous prouvons la commutation de $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$ aux images inverses (extraordinaires) et aux foncteurs duaux. Ces propriétés sont compatibles à Frobenius.

ABSTRACT (*Arithmetic $\mathcal{D}$-modules associated with overconvergent isocrystals. Smooth case*)

Let $\mathcal{V}$ be a mixed characteristic complete discrete valuation ring, $\mathcal{P}$ a separated smooth formal scheme over $\mathcal{V}$, P its special fiber, X a smooth closed subscheme of P, T a divisor in P such that $T_X = T \cap X$ is a divisor in X and $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ the tensorized with $\mathbb{Q}$ weak completion of the sheaf of differential operators on $\mathcal{P}$ with overconvergent singularities along T. We construct a fully faithful functor denoted by $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$ from the category of isocrystal on $X \setminus T_X$ overconvergent along T_X into the category of coherent $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules with support in X. Next, we prove the commutation of $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$ with (extraordinary) inverse images and dual functors. These properties are compatible with Frobenius.

Texte reçu le 18 septembre 2006, accepté le 29 mai 2009

DANIEL CARO, Mathématique, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* daniel.caro@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F10, 14F30.

Mots clefs. — $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, Frobenius, foncteur dual, image directe.

L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2009/453/$ 5.00

Introduction

Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$ et de corps résiduel k, $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, P sa fibre spéciale, T un diviseur de P, $U := P \setminus T$ et F la puissance s-ième du Frobenius absolu de P, avec s un entier fixé. On désigne par $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$, l'*anneau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{P}$ de niveau fini à singularités surconvergentes le long de T* (voir [4, 4.2.5]). Lorsque le diviseur T est vide, on ne l'indique pas. On obtient la notion de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur U à singularités surconvergentes le long de T (lorsque $\mathcal{P}$ est propre, il n'est pas nécessaire de préciser T), i.e., de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules (toujours à gauche par défaut). Pour illustrer ce fait, rappelons que Berthelot a construit un foncteur canonique, noté sp_*, pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux sur U surconvergent le long de T dans celle des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents (voir [4, 4.4.5]). Il a aussi défini la catégorie des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules (cohérents) de la façon suivante : les objets sont les couples $(\mathcal{M}, \phi)$, où $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module (cohérent) et ϕ est un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-linéaire $F^*\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$. Les flèches $(\mathcal{M}, \phi) \to (\mathcal{M}', \phi')$ sont les morphismes $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-linéaires $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ commutant à Frobenius. En construisant de même les F-isocristaux surconvergents, il a établi dans [5, 4.6] que le foncteur sp_* commute aux structures de Frobenius respectives.

Soit X un sous-schéma fermé *k-lisse* de P tel que $T \cap X$ soit un diviseur de X (cette dernière hypothèse est inutile mais commode). Dans cet article, nous étendons à cette situation géométrique que l'on appellera « cas de la compactification lisse non relevable » ou simplement « cas lisse » le foncteur sp_* évoqué ci-dessus. Plus précisément, nous construisons un foncteur pleinement fidèle, noté $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}$, de la catégorie des isocristaux sur $X \setminus (T \cap X)$ surconvergents le long de $T \cap X$ dans celle des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans X. Lorsque $X \hookrightarrow P$ se relève en un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses u : $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{P}$, on a $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +} = u_{T,+} \circ \mathrm{sp}_*$, où $\mathrm{sp} : \mathfrak{X}_K \to \mathfrak{X}$ est le morphisme de spécialisation de la fibre générique de $\mathcal{P}$ (en tant qu'espace analytique rigide) dans $\mathcal{P}$ et où $u_{T,+}$ est l'image directe par u à singularités surconvergentes le long de T. Or, comme X est lisse, $X \hookrightarrow P$ se relève localement. La *cristallinité* de la catégorie des isocristaux surconvergents (resp. des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques) sur $X \setminus T$ nous fournit des isomorphismes de recollement entre deux choix de relèvement. La construction de $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}$ se fait alors par recollement en s'assurant de la compatibilité (et ce de façon transitive) de ces isomorphismes de recollement. Ces résultats avaient été annoncés dans [8]. L'idée de procéder par recollement était bonne mais sa procédure, suite à une erreur décelée par Berthelot, a été amendée dans ce papier.

Avant d'en préciser le contenu, donnons maintenant quelques applications de ce travail initial dans nos autres travaux. Dans ce paragraphe (et seulement dans ce paragraphe), Y est toujours lisse mais on ne suppose plus X lisse. Dans [11], nous définissons, au moyen du foncteur sp_+ de ce papier, une catégorie de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques dont les objets sont « les F-isocristaux surcohérents sur Y » (voir [11, 6.2.1, 6.4.3.(a)] et les notations de [11, 5.3.1]). Pour étudier (notamment sa stabilité par opérations cohomologiques) cette catégorie de coefficients sur Y, l'idée est d'utiliser le théorème de désingularisation de de Jong des variétés algébriques ([22]) pour se ramener au cas où X est lisse (voir les preuves de [11, 6.3.1], [11, 6.3.4]) ; le cas où X est lisse étant étudié dans ce travail et, pour ce qui concerne la surcohérence de l'image essentielle de sp_+, dans [11, 6.1.4]. On en déduit, d'abord dans le cas de la désingularisation idéale (voir la définition [11, 7.1.1]), que cette catégorie de coefficients sur Y est équivalente à celle des F-isocristaux surconvergents sur Y (voir [11, 7.2.6]). Notons que la preuve de cette équivalence utilise [11, 7.2.4], qui elle-même utilise (voir la première page de la preuve) la description de l'image essentielle du foncteur sp_+ donnée via 2.5.10 dans ce papier. Puis, on vérifie que cette équivalence entre F-isocristaux surcohérents sur Y et F-isocristaux surconvergents sur Y se généralise au cas d'une variété quelconque lisse Y (voir [13, 2.3.1]). Grâce aux théorèmes de désingularisation de de Jong et de monodromie génériquement finie et étale de Tsuzuki ([30]), on obtient d'abord la cohérence (4.3.7) puis la surholonomie des F-isocristaux surconvergents *unités* (i.e. dont les pentes de Frobenius sont nulles) sur Y ([15]). En dernier lieu, via le théorème de réduction semi-stable de Kedlaya, (voir [24, 25, 26, 27]), nous étendons ce résultat à tous les F-isocristaux surconvergents sur Y (voir d'abord [14] puis [17]).

Précisons à présent le contenu de cet article : dans une première partie, nous établissons la transitivité, pour la composition de morphismes propres, des morphismes d'adjonction entre images directes et images inverses extraordinaires. Nous en déduisons en particulier que l'isomorphisme *canonique* (i.e., celui construit directement à la main : 1.1.2.1) de composition des images directes utilisé ici est le même (dans le cas de morphismes propres) que celui de [12, 1.2.15] dont la construction nécessite le théorème de dualité relative. D'où une unification (voir 1.2.9).

Dans le deuxième chapitre, nous construisons le foncteur pleinement fidèle $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$.

Dans [10], nous avons obtenu un isomorphisme de commutation de sp_* aux foncteurs duaux respectifs. Pour l'étendre à $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$, il s'agit d'abord d'établir sa compatibilité aux foncteurs images inverses (extraordinaires) par une immersion ouverte. Cela fait l'objet de la troisième partie.

Dans le quatrième chapitre, nous prouvons la commutation de $\mathrm{sp}_{X\hookrightarrow\mathcal{P},T,+}$ aux foncteurs restrictions, images inverses extraordinaires et foncteurs duaux. La vérification la plus technique est celle concernant le foncteur dual. Nous construisons pour cela un isomorphisme de commutation des foncteurs duaux

aux images inverses extraordinaires par une immersion. Pour valider sa transitivité, nous utilisons celle prouvée dans le premier chapitre. Dans sa procédure de recollement, nous nous servons aussi du troisième chapitre.

Le théorème de pleine fidélité de Kedlaya du foncteur associant à des F-isocristaux sur Y surconvergents le long de $T \cap X$ les F-isocristaux convergents sur Y correspondants (voir [25, 4.2.1]) et celui de Tsuzuki sur les restrictions (voir [30, 4.1.1]) simplifient, lorsque l'on se restreint aux F-isocristaux surconvergents, la vérification de la commutation de $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P},T,+}$ aux foncteurs cohomologiques ci-dessus. Ces théorèmes nous ramènent sans difficulté au cas où $X \hookrightarrow P$ se relève, ce qui évite les tracas engendrés par les recollements (transitivité etc.). Ainsi, *lorsque l'on dispose de structures de Frobenius*, le premier et le troisième chapitre deviennent superflus.

Enfin, nous terminons par la cohérence, en tant que $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module, de l'image par $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P},T,+}$ d'un F-isocristal *unité* sur $X \setminus (T \cap X)$ surconvergent le long de $T \cap X$.

Remerciements. — Je remercie P. Berthelot pour une erreur qu'il a décelée dans la précédente procédure de recollement permettant de construire $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P},T,+}$.

Notations

Nous garderons les notations suivantes : les schémas formels seront notés par des lettres calligraphiques ou gothiques et leur fibre spéciale par les lettres romanes correspondantes. De plus, la lettre $\mathcal{V}$ désignera un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$, de corps de fractions K de caractéristique 0, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et π une uniformisante. On fixe un entier naturel $s \geq 1$ et on désigne par F la puissance s-ième de l'endomorphisme de Frobenius. Les modules sont par défaut des modules à gauche. Si X est un schéma ou schéma formel, on note d_X la dimension de Krull de X et $\omega_X = \Omega_X^{d_X}$ le faisceau des différentielles de degré maximum. S'il existe un système de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ (sur un schéma ou schéma formel), on notera, pour tous $i = 1, \ldots, d$, $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$ et ∂_i les dérivations correspondantes. Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, on pose $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} := \tau_1^{\{k_1\}} \cdots \tau_d^{\{k_d\}}$, $\underline{\partial}^{<\underline{k}>} := \partial_1^{<k_1>} \cdots \partial_d^{<k_d>}$. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau abélien, on écrit $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}} := \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

• Les indices qc, tdf, coh et parf signifient respectivement *quasi-cohérent*, *de Tor-dimension finie*, *cohérent* et *parfait* tandis que D^{b}, D^{+} et D^{-} désignent respectivement les catégories dérivées des complexes à cohomologie bornée, bornée inférieurement et bornée supérieurement. Enfin, si $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux, les symboles ${}^{g}\mathcal{A}$, ${}^{d}\mathcal{A}$ puis ${}^{*}\mathcal{A}$ se traduisent respectivement par $\mathcal{A}$-module « à gauche », « à droite » puis « à droite ou à gauche » (par exemple, $D({}^{g}\mathcal{A})$ indique la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-modules à gauche).