Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LE DÉVELOPPEMENT SPECTRAL DE LA FORMULE DES TRACES D'ARTHUR-SELBERG SUR LES CORPS DE FONCTIONS

Ngô Dac Tuân

Tome 137
Fascicule 4

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 545-586

Bull. Soc. math. France
137 (4), 2009, p. 545–586

SUR LE DÉVELOPPEMENT SPECTRAL DE LA FORMULE DES TRACES D'ARTHUR-SELBERG SUR LES CORPS DE FONCTIONS

PAR NGÔ DAC TUÂN

RÉSUMÉ. — On établit le développement spectral de la formule des traces d'Arthur-Selberg sur les corps de fonctions pour un groupe réductif connexe déployé sur un corps fini en partant seulement du théorème de décomposition spectrale de Langlands. Notre preuve généralise la méthode de Lafforgue dans le cas des groupes linéaires $\mathrm{GL}(r)$.

ABSTRACT (*On the fine spectral expansion of the Arthur-Selberg trace formula on function fields*)

In this paper, we give the fine spectral expansion of the Arthur-Selberg trace formula on function fields for a split reductive group over a finite field. It is analogue to the work of Arthur on number fields and extends the work of Lafforgue on function fields for general linear groups.

Introduction

0.1. — Dans la théorie des formes automorphes, la formule des traces d'Arthur-Selberg développée par Arthur joue un rôle très important. Soit G un groupe réductif connexe sur un corps de nombres F dont l'anneau des adèles sera noté $\mathbb{A}$. Pour une fonction test convenable f, on s'intéresse à l'opérateur de

Texte reçu le 31 août 2007, révisé le 4 décembre 2008, accepté le 5 février 2009

NGÔ DAC TUÂN, CNRS - Université de Paris Nord (Paris 13), LAGA - Département de Mathématiques, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France • *E-mail :* ngodac@math.univ-paris13.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F72.

Mots clefs. — Formule des traces d'Arthur-Selberg, corps de fonctions, polygone de Harder-Narasimhan.

© Société Mathématique de France

convolution $R(f)$ sur $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ qui admet un noyau $K(x,y)$ défini sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times G(F)\backslash G(\mathbb{A})$. En général, ce noyau n'est pas intégrable sur la diagonale, la première étape dans les travaux d'Arthur consiste à modifier ce noyau pour qu'il converge. Le noyau tronqué K^T qui dépend d'un paramètre de troncatures T admet une expression géométrique et une expression spectrale, ce qui donne la première forme de la formule des traces - une égalité entre un côté dit *géométrique* et l'autre côté dit *spectral*.

Puis, la deuxième étape consiste à raffiner ces expressions géométriques et spectrales pour obtenir une nouvelle formule qui est plus explicite et plus facile à manipuler. Du côté géométrique, il s'agit d'exprimer les termes en fonctions des intégrales orbitales et des intégrales orbitales pondérées. Du côté spectral, il s'agit d'écrire les termes en fonctions des traces pondérées. On obtient ainsi une version fine de la formule des traces, mais elle est non-invariante.

Pour les applications, Arthur a aussi développé une version invariante puis une version invariante stable de la formule des traces. On renvoie le lecteur à l'article [5] pour une excellente introduction à la formule des traces sur les corps de nombres.

0.2. — Désormais, on se place sur les corps de fonctions. Dans les travaux de Drinfeld [9, 8] et Lafforgue [13] sur la correspondance de Langlands sur les corps de fonctions pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}(r)$, les auteurs ont besoin seulement d'une version fine de la formule des traces non invariante pour $\mathrm{GL}(r)$. Si l'on espère généraliser cette correspondance pour un groupe réductif quelconque G en suivant la stratégie de Drinfeld et de Lafforgue, voir par exemple [10], il est naturel de transposer sur les corps de fonctions la version fine de la formule des traces d'Arthur-Selberg non invariante pour un tel groupe.

Dans ce texte, on se restreint au cas où G est un groupe réductif connexe déployé sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, ce qui permet de simplifier considérablement les arguments. L'auteur présentera une preuve pour tous les groupes réductifs dans un prochain travail [17].

Voici l'énoncé du théorème principal de ce texte :

Théorème. — *Fixons un sous-groupe discret cocompact J de $A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A})$ où A_G est le centre de G. Soit f une fonction test convenable et p un paramètre de troncatures convenable. Alors, la trace tronqué $\mathrm{Tr}^{\leq p}(f)$ s'écrit comme*

$$\mathrm{Tr}^{\leq p}(f) = \sum_{(P,\pi)} \mathrm{Tr}^{p}_{(P,\pi)}(f)$$

où la somme parcourt l'ensemble des paires discrètes (P,π) avec π unitaire.

De plus, pour une paire discrète (P,π) avec π unitaire, alors

$$\mathrm{Tr}^p_{(P,\pi)}(f) = \frac{1}{|\,\mathrm{Fixe}(\pi)\,|} \sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in \mathrm{Fixe}(\pi)} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}} \mathrm{Tr}(M^p_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}(.,f,\lambda_\sigma)) \cdot d\lambda_{P_\sigma}$$

où $M^p_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}(.,f,\lambda_\sigma)$ est un opérateur tronqué sur l'espace des fonctions $L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$.

L'énoncé est semblable à celui sur un corps de nombres dû à Arthur [2]. Par contre, on donne ici une preuve différente qui est plus simple dans le cas des corps de fonctions. Elle part seulement du théorème de décomposition spectrale de Langlands, et est basée sur la théorie de Fourier appliquée à certaines fonctions périodiques. Cette stratégie est due à Lafforgue [12, chapitre VI] qui démontre le même résultat pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}(r)$.

0.3. Organisation de ce texte. — Les premières sections 1-7 contiennent des rappels. Après avoir introduit les notations (section 1), on rappelle quelques lemmes combinatoires de Langlands et d'Arthur (section 2), et un théorème de Behrend qui démontre l'existence et l'unicité de la réduction canonique d'un G-fibré sur une courbe projective lisse X sur $\mathbb{F}_q$ (section 3). Puis la section 4 introduit les paramètres de troncatures : ils généralisent la notion de polygone canonique de Harder-Narasimhan des fibrés vectoriels, et se confondent avec les troncatures d'Arthur. Les sections 5-7 ont pour objet d'énoncer le théorème de décomposition spectrale de Langlands, cf. théorème 7.3, à partir des notions de séries d'Eisenstein et d'opérateurs d'entrelacement de Langlands.

La section 8 donne des expressions spectrales du noyau considéré qui dépend de deux variables, et définit la trace tronquée d'Arthur qui intègre ce noyau sur la diagonale après troncature. La section 9 démontre l'intégrabilité de la trace tronquée d'Arthur. Un principe simple dans les manipulations consiste à regrouper les filtrations qui ont la même réduction canonique lorsqu'on considère une somme indexée par toutes les filtrations d'un certain G-fibré. Il est ainsi de nature combinatoire.

Les sections 10 et 11 démontrent le théorème principal ci-dessus. On recourt à la théorie de Fourier. L'idée est d'écrire l'intégrale sur la diagonale comme une somme de coefficients de Fourier. Puis on utilise le théorème de décomposition spectrale de Langlands pour calculer les produits scalaires qui apparaissent dans les expressions des coefficients de Fourier. Pour conclure, on n'a plus qu'à calculer la transformée de Fourier des fonctions de troncature d'Arthur (section 10), puis leur somme sur tous les éléments du groupe de Weyl. Enfin, la notion de (G,M)-famille introduite par Arthur montre que ces sommes sur les éléments du groupe de Weyl restent bien définies quand on passe à la limite qui correspond à faire la somme de tous les coefficients de Fourier.

0.4. Remerciements. — Je voudrais remercier profondément Laurent Lafforgue et Ngô Bao Châu pour leurs encouragements et pour d'utiles discussions. Je remercie le *referee* anonyme pour sa lecture attentive et ses nombreuses remarques pertinentes. Il m'a permis de corriger plusieurs erreurs et d'améliorer la rédaction. Ce travail a été réalisé pendant mes séjours au Max-Planck Institute for Mathematics à Bonn en printemps 2006, et à l'Institute for Advanced Study à Princeton en automne 2006 par le biais du contrat DMS-0635607. Je les remercie pour leur hospitalité et leur support.

1. Notations

1.1. — Dans ce texte, X sera une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Fixons une clôture algébrique k de $\mathbb{F}_q$ et notons $\overline{X} = X \otimes_{\mathbb{F}_q} k$.

On fixe aussi un groupe réductif connexe déployé G sur $\mathbb{F}_q$. Tous les groupes algébriques considérés dans ce texte seront définis sur $\mathbb{F}_q$. Par définition, *un sous-groupe de Lévi de G sur $\mathbb{F}_q$* est un sous-groupe de Lévi défini sur $\mathbb{F}_q$ d'un certain sous-groupe parabolique de G qui lui-même est défini sur $\mathbb{F}_q$.

On suit les terminologies d'Arthur [5, section 16]. Soit M un sous-groupe de Lévi de G. On notera $\mathcal{L}(M)$ l'ensemble des sous-groupes de Lévi de G sur $\mathbb{F}_q$ contenant M, $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G définis sur $\mathbb{F}_q$ contenant M, et $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G définis sur $\mathbb{F}_q$ admettant M comme un sous-groupe de Lévi. Ces ensembles sont finis, cf. [5, pages 91-92].

Comme G est déployé sur $\mathbb{F}_q$, on peut fixer un couple (M_0, P_0) où M_0 est un tore déployé maximal de G défini sur $\mathbb{F}_q$, et P_0 est un sous-groupe de Borel de G défini sur $\mathbb{F}_q$ contenant M_0. Par la suite, on utilisera $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$) à la place de $\mathcal{L}(M_0)$ (resp. $\mathcal{P}(M_0)$, $\mathcal{F}(M_0)$).

On désigne par Δ_0 l'ensemble de racines simples de G, par W le groupe de Weyl de G qui peut s'identifier à un sous-groupe de $G(F)$. Pour tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{F}$, on notera

$$W_P = W \cap M_P. \tag{1.1.1}$$

On désigne par $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard (définis sur $\mathbb{F}_q$) de G, autrement dit ceux qui contiennent P_0. C'est un ensemble fini qui est en bijection avec les sous-ensembles de Δ_0 : G correspond à l'ensemble vide, P_0 correspond à Δ_0.