Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LES FONCTIONS À LIEU SINGULIER DE DIMENSION 1

Daniel Barlet

Tome 137
Fascicule 4

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 587-612

Bull. Soc. math. France
137 (4), 2009, p. 587–612

SUR LES FONCTIONS À LIEU SINGULIER DE DIMENSION 1

par Daniel Barlet

En hommage à Bernard Malgrange

Résumé. — Dans notre article [6] nous avons construit, pour une classe assez large de germes de fonctions holomorphes $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ à lieu singulier $S := \{df = 0\}$ de dimension 1 des invariants analytiques qui généralisent le réseau de Brieskorn d'un germe à singularité isolée. Dans cet article nous montrons que les résultats que nous avions obtenus s'étendent à *tous les germes à lieu singulier de dimension 1* sans autre restriction. Ces invariants, essentiellement donnés par des (a,b)-modules géométriques, (objet qui est une abstraction du réseau de Brieskorn formel), décrivent les diverses connexions de Gauss-Manin filtrées associées à un tel germe, ainsi que les relations entre elles.

Texte reçu le 18 septembre 2008, accepté le 4 mai 2009

Daniel Barlet, Institut Élie Cartan UMR 7502, Nancy-Université, CNRS, INRIA et Institut Universitaire de France, BP 239 - F - 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France •
E-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 32-S-25, 32-S-40, 32-S-50.

Mots clefs. — Hypersurfaces à singularités non isolées, germes holomorphes à lieu singulier de dimension 1, réseau de Brieskorn, (a, b)-module, connexion de Gauss-Manin filtrée.

Abstract (*On functions with a 1-dimensional singular locus*). — In our previous paper [6] we constructed for a large class of germs of holomorphic functions $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ with one dimensional singular set $S := \{df = 0\}$, analytic invariants which generalize the Brieskorn module of an isolated singularity germ. In the present article we show that all results obtained in this previous paper are valid for *any holomorphic germ with one dimensional singular locus*. So, these invariants, essentially given by geometric (a, b)-modules (this object is an "abstraction" of a formal Brieskorn module) describe the various filtered Gauss-Manin connections associated to such a germ, and the relations between them.

1. Introduction

1.1. Généralisation de l'étude locale aux points génériques de la courbe S. — Dans le présent article nous considèrerons la situation suivante :

Soit $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe dont le lieu singulier $S := \{x/f(x) = 0 \text{ et } df_x = 0\}$ est un germe de courbe à l'origine, et soit $t : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe non singulière tel que la restriction de t à $(S, 0)$ soit finie. Sur un voisinage ouvert X de l'origine assez petit on aura pour chaque $\sigma \in S^* := S \setminus \{0\}$ un (a,b)-module associé au germe en σ de fonction à singularité isolée obtenu en restreignant f à l'hypersurface lisse définie par $\{t = t(\sigma)\}$. Rappelons que ce (a,b)-module n'est rien d'autre que le complété formel du module de Brieskorn de ce germe de fonction à singularité isolée (voir par exemple [7], [11], pour l'origine de cette notion et [3], [4] ou [5] pour les propriétés de base des (a,b)-modules).

Les faisceaux de cohomologie $\hat{\mathcal{H}}^\bullet$ du complexe de de Rham

$$(\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\, df^\bullet, d^\bullet)$$

où $\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\, df^\bullet$ désigne le noyau de la multiplication extérieure par df

$$\wedge df^\bullet : \hat{\Omega}^\bullet \to \hat{\Omega}^{\bullet+1}$$

agissant sur le complété formel en f des formes holomorphes, sont nuls en degrés différents de $1, n, n+1$ dans cette situation et les faisceaux $\hat{\mathcal{H}}^n$ et $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ sont à support dans S. La considération du germe auxiliaire t permet de calculer ces deux faisceaux comme respectivement noyau et conoyau d'une t-connexion compatible avec les opérations a et b de la façon suivante.

Soit $(\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\, df_/{}^\bullet, d_/{}^\bullet)$ le complexe de de Rham t-relatif complété formellement en f, et soit $\mathbb{E} := \mathcal{H}^n(\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\, df_/{}^\bullet, d_/{}^\bullet)$. Ce faisceau est naturellement muni d'opérations a et b ainsi que d'une structure de $t^{-1}(\mathcal{O}_D)$-module, où D est un disque de centre 0 assez petit dans $\mathbb{C}$. Nous définissons alors une $t^{-1}(\mathcal{O}_D)$-connexion

$$b^{-1}.\nabla : \mathbb{P} \to \mathbb{E}$$

où $\mathbb{P} := \{x \in \mathbb{E} / \nabla(x) \in b.\mathbb{E}\}$, qui commute à a et b.

La proposition suivante est démontrée dans [6, prop. 4.2.8].

Proposition 1.1.1. — *On a une suite exacte naturelle de faisceaux de $\underline{\mathbb{C}}_X$-modules à support S :*

$$0 \to \hat{\mathcal{H}}^n \xrightarrow{u} \mathbb{P} \xrightarrow{b^{-1}.\nabla} \mathbb{E} \xrightarrow{v} \hat{\mathcal{H}}^{n+1} \to 0$$

compatible aux opérations a et b sur ces faisceaux, où u est induite par la projection évidente $\hat{\mathrm{K}}\mathrm{er}\, df^n \to \hat{\Omega}^n_{/}$ et v par la multiplication extérieure par dt.

L'objectif principal de cet article est de montrer le résultat « technique » suivant :

Théorème 1.1.2. — *Dans la situation précisée ci-dessus, on a*

1. *le faisceau $\hat{\mathcal{H}}^n$ est un système local de (a,b)-modules géométriques sur S^* ;*
2. *la restriction à S^* du faisceau $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ vérifie la propriété de prolongement analytique suivante*

   (PA) Soient $V \subset U$ deux ouverts de S^*, avec U connexe et V non vide. Alors la restriction $\Gamma(U, \hat{\mathcal{H}}^{n+1}) \to \Gamma(V, \hat{\mathcal{H}}^{n+1})$ est injective.

On expliquera comment ce résultat se déduit du théorème de finitude 4.1.1 après l'énoncé du théorème 4.1.1.

Précisons que la « pièce manquante » dans [6] pour traiter le cas général obtenu ici, c'est à dire pour montrer le théorème 1.1.2, est essentiellement contenue dans le paragraphe 2.3.

Le point crucial est l'existence sur S^* d'un $t^{-1}(\mathcal{O}_D[[b]])$-réseau $\mathbb{G} \subset \mathbb{E}$ qui est stable par $b^{-1}\nabla$ et a.

Le paragraphe 3 explicite le lien avec les dérivations d'intégrales « à la Malgrange » (voir [8]) de formes holomorphes sur les cycles évanescents dans ce cadre à deux fonctions (à savoir f et t). Ce paragraphe est destiné à éclairer le lecteur sur la signification de la connexion ∇.

Le paragraphe 4 est consacré à la preuve du théorème de finitude, qui, après la proposition 2.3.2, est facile et utilise des résultats classiques sur les familles de fonctions à singularité isolée.

On termine en donnant un critère pour estimer le faisceau $\mathbb{G}$ qui est loin d'être facile à calculer et en explicitant des exemples simples.

En conclusion le théorème 1.1.2 montre que l'hypothèse (HH) des théorèmes 4.3.1 et 4.3.2 de [6] ne sont pas utiles pour obtenir les propriétés souhaitées des faisceaux $\hat{\mathcal{H}}^n$ et $\hat{\mathcal{H}}^{n+1}$ pour un germe de fonction holomorphe à singularité de dimension 1.

Rappelons que cette hypothèse (HH) implique que la singularité isolée transverse est localement constante le long de S^*, ce qui est assez restrictif, bien que cette situation soit assez commune, par exemple quand le germe à l'origine est quasi-homogène.

Le théorème 1.1.2 implique que l'ensemble des résultats de [6] est valable dans le cadre général d'un germe à lieu singulier de dimension 1. En particulier le théorème de finitude 5.2.1, le corollaire 5.2.3 ainsi que les théorèmes 6.2.1 et 6.4.1 sont démontrés sous cette seule hypothèse. Les énoncés généralisant les théorèmes 5.2.1 et 6.2.1 sont détaillés ci-après pour la commodité du lecteur.

1.2. Quelques conséquences

1.2.1. *Rappels. — Dans ce qui suit f désignera un germe à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ de fonction holomorphe qui est supposé réduit.*

Pour f réduite, on a un isomorphisme naturel compatible à a et b,

$$E_1 \otimes \mathbb{C}_Y \simeq \hat{\mathcal{O}}_X.df \cap \operatorname{Ker} d \simeq \mathcal{H}^1\big((\hat{\operatorname{K}}\mathrm{er}\, df)^\bullet, d^\bullet)\big)$$

où l'on a posé $E_1 := \mathbb{C}[[z]].dz$, muni des opérations $a := \times z$ et $b := (\int_0^z).dz$.

Placé en degré 1 ce faisceau défini un sous-complexe, que nous noterons $E_1 \otimes \mathbb{C}_Y[1]$, du complexe $\big((\hat{\operatorname{K}}\mathrm{er}\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$.

Nous définirons le complexe $\big((\tilde{\operatorname{K}}\mathrm{er}\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ comme le quotient

$$\big((\tilde{\operatorname{K}}\mathrm{er}\, df)^\bullet, d^\bullet\big) := \big((\hat{\operatorname{K}}\mathrm{er}\, df)^\bullet, d^\bullet\big)/E_1 \otimes \mathbb{C}_Y[1].$$

Notons $\tilde{\mathcal{A}}$ la $\mathbb{C}$-algèbre $\tilde{\mathcal{A}} := \{\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(a).b^\nu, \mathrm{avec} P_\nu \in \mathbb{C}[x]\}$ dont le produit est défini par les deux conditions suivantes :

1) On a la relation de commutation $a.b - b.a = b^2$.
2) La multiplication par a (à gauche ou à droite) est continue pour la filtration b-adique.

On a alors le résultat général suivant (voir [6, th. 2.1.1]) :

THÉORÈME 1.2.1. — *Les complexes $\big((\tilde{\operatorname{K}}\mathrm{er}\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ et $\big((\hat{\operatorname{K}}\mathrm{er}\, df)^\bullet, d^\bullet\big)$ sont canoniquement quasi-isomorphes à des complexes de faisceaux de $\tilde{\mathcal{A}}$-modules (à gauche) sur $Y := f^{-1}(0)$ ayant des différentielles $\tilde{\mathcal{A}}$-linéaires.*

De plus, via ces quasi-isomorphismes, la suite exacte

$$0 \to E_1 \otimes \mathbb{C}_Y[1] \to \big((\hat{\operatorname{K}}\mathrm{er}\, df)^\bullet, d^\bullet\big) \to \big((\tilde{\operatorname{K}}\mathrm{er}\, df)^\bullet, d^\bullet\big) \to 0$$

correspond à une suite exacte de complexes de faisceaux de $\tilde{\mathcal{A}}$-modules.

Ce théorème montre l'existence d'une structure naturelle de $\tilde{\mathcal{A}}$-modules sur tout groupe d'hypercohomologie de ces deux complexes. Il donne également la $\tilde{\mathcal{A}}$-linéarité (à gauche) des applications naturelles entre ces groupes.