

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LA PERSISTANCE DES COURBES INVARIANTES POUR LES DYNAMIQUES HOLOMORPHES FIBRÉES LISSES

Mario Ponce

**Tome 138
Fascicule 2**

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 153-180

SUR LA PERSISTANCE DES COURBES INVARIANTES POUR LES DYNAMIQUES HOLOMORPHES FIBRÉES LISSES

PAR MARIO PONCE

RÉSUMÉ. — En s'appuyant sur un théorème des fonctions implicites de Hamilton, nous montrons la persistance d'une courbe invariante indifférente pour une dynamique holomorphe fibrée de classe C^∞ . Une condition diophantienne sur la paire de nombres de rotation est demandée. On montre également que cette condition est optimale.

ABSTRACT (*On the persistence of invariant curves for smooth fibred holomorphic dynamics*)

We establish the persistence of an invariant curve for a smooth fibered holomorphic dynamical system, provided that a diophantine condition for the pair of rotation numbers holds. We also show that this diophantine condition is optimal. Our proof relies on Hamilton's implicit function Theorem.

1. Introduction

La théorie des systèmes dynamiques unidimensionnels est loin d'être un champ épuisé. Cependant, au moins deux types de telles dynamiques peuvent être considérés comme étant bien compris. Il s'agit de la théorie des homéomorphismes positifs du cercle (une dimension réelle, voir par exemple [8], [32])

Texte reçu le 9 octobre 2007, révisé le 12 mai 2008 et le 11 juillet 2008, accepté le 12 août 2008

MARIO PONCE, Pontificia Universidad Católica de Chile

Classification mathématique par sujets (2000). — 37F50, 37J40.

Mots clefs. — Dynamique holomorphe fibrée, condition diophantienne, courbes invariantes.

et la dynamique semi-locale des germes holomorphes irrationnellement indifférents qui fixent l'origine du plan complexe (une dimension complexe, voir par exemple [4], [31]). On dit que de telles dynamiques, dont le comportement des orbites est contrôlé par un nombre réel qu'on appelle *le nombre de rotation*, sont de type *elliptique* (récurrentes, conservatives). On sait que lorsque ce nombre de rotation vérifie une certaine hypothèse arithmétique alors la dynamique est plutôt simple (peu de mesures invariantes, conjuguée à une dynamique linéaire, etc.). Par contre, lorsqu'il s'agit de dynamiques d'allure elliptique en dimension supérieure la théorie est beaucoup moins développée. Dans ce travail, nous présentons des résultats pour une classe de systèmes dynamiques qui ont une allure elliptique, qui ne sont pas unidimensionnels et qu'on peut considérer comme étant de dimension intermédiaire. Ces objets sont une généralisation non triviale des germes holomorphes. Définissons alors nos objets d'étude : soit α un nombre irrationnel et soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe du plan complexe. Nous considérons des transformations fibrées de la forme

$$F : \mathbb{T}^1 \times U \longrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{C} \\ (\theta, z) \longmapsto (\theta + \alpha, f(\theta, z)),$$

où $\mathbb{T}^1$ est le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$ la fonction $f(\theta, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction univalente (holomorphe et injective). Nous appelons une telle transformation F une *dynamique holomorphe fibrée au dessus du cercle* et la noterons désormais *dhf*. Dans ce travail nous allons traiter avec des *dhf* qui sont de classe C^∞ , dites *dhf lisses*.

Ce type de transformations s'inscrit dans le cadre plus général des *produits croisés* (skew-products). Les produits croisés engendrés par des dynamiques qui sont bien comprises ont attiré un grand intérêt ces dernières années car d'une part ils présentent des phénomènes nouveaux (voir [10], [30], etc.), et d'autre part, ils représentent un état intermédiaire entre les dynamiques unidimensionnelles et les dynamiques de dimension supérieure. Dans le cas des deux types de dynamiques elliptiques unidimensionnelles citées ci-dessus, la théorie la mieux développée est celle des homéomorphismes du cercle fibré au dessus d'une rotation irrationnelle. L'article de M. Herman [10] pose les bases de l'étude des homéomorphismes fibrés en définissant le nombre de rotation fibré. Plus récemment, cette étude a été relancée notamment par les travaux de G. Keller, T. Jäger et J. Stark (voir [29], [13]), qui ont établi en particulier une classification à la Poincaré de telles dynamiques basée sur les propriétés des nombres de rotation associés et l'existence de courbes invariantes. Dans sa thèse de doctorat, O. Sester [27] (voir aussi [28]) a étudié la dynamique des polynômes fibrés, en généralisant les notions classiques d'ensemble de Julia, fonction de Green et de la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot dans l'espace de paramètres. Les travaux de M. Jonsson (voir [15], [16]) sont

aussi une référence importante sur la dynamique fibrée des transformations rationnelles. La réductibilité des cocycles quasipériodiques est un important sujet d'étude qui doit être considéré au moment de regarder les dynamiques fibrées au dessus d'une rotation irrationnelle (voir par exemple [19], [1]). En fait, R.Johnson and J.Moser [14] ont défini un nombre de rotation fibré pour l'opérateur de Schrödinger quasipériodique.

Il y a encore une autre raison pour laquelle les dhf présentent un intérêt d'étude. Le problème qui nous traitons dans ce travail présente des caractéristiques très similaires à celles du problème bien connu de Melnikov (voir [22], [6], [3]). La persistance des tores invariants de dimension non-maximale pour les dynamiques hamiltoniennes présente au niveau infinitésimal (et *a posteriori* au niveau arithmétique) les mêmes ingrédients que la persistance des courbes invariantes pour les dhf .

La notion de point fixe ou de point périodique pour une transformation fibrée au dessus d'une rotation minimale n'a aucun sens (car α est un nombre irrationnel). L'extension naturelle de ce concept dans notre cadre est celle d'une courbe $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ invariante, c'est-à-dire une courbe de classe C^∞ qui satisfait l'équation

$$F(\theta, u(\theta)) = (\theta + \alpha, u(\theta + \alpha))$$

pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$, ou de façon équivalente $f(\theta, u(\theta)) = u(\theta + \alpha)$. Ces objets jouent le rôle d'un centre autour duquel la dynamique de F s'organise, en généralisant le rôle d'un point fixe pour la dynamique locale d'un germe holomorphe $g : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. En fait, dans [23] l'auteur étudie la dynamique locale autour d'une courbe invariante et montre un théorème de Siegel dans ce contexte.

Nous nous intéressons à l'existence d'une telle courbe invariante. Comme le nombre de rotation transversal (cf. définition 5) contrôle la dynamique locale, nous nous concentrons sur l'existence des courbes invariantes indifférentes avec un nombre de rotation transversal fixé. Dans ce travail nous traitons le problème de la persistance des courbes, sous des petites perturbations sur la dynamique. Nous obtenons un résultat du type KAM qui montre que la persistance a lieu sous certaines hypothèses arithmétiques sur la paire des nombres de rotation associée. Ainsi, le problème est un problème de petits diviseurs. Dans la classe analytique, nous pouvons obtenir des résultats beaucoup plus intéressants. En fait, dans [24] l'auteur montre que la persistance a lieu sous une hypothèse plus faible à la Brjuno sur la paire de nombres de rotation.

Remerciements. — Ce travail fait partie de la Thèse de Doctorat de l'auteur, préparée au sein du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay. L'auteur voudrait remercier Jean-Christophe Yoccoz par sa direction et soutien constant, et remercie aussi Raphaël Krikorian pour ses corrections et suggestions. Cet article a été préparé pendant un séjour post-doctoral à l'Universidad Católica de Chile,

supporté par le *Proyecto ADI 17 Anillo en Sistemas Dinámicos en baja dimensión* et le *Proyecto FONDECYT Post-doctorado 3080055*.

2. Conditions arithmétiques et l'équation linéarisée

Dans cette section nous allons d'abord rappeler quelques définitions classiques sur les conditions arithmétiques. Nous allons introduire des conditions arithmétiques adaptées aux problèmes de ce travail et nous traiterons aussi des équations linéaires dites *cohomologiques* qui font appel à ces conditions.

2.1. Conditions arithmétiques. — Soit x un nombre réel. On pose $\|x\| = \min_{p \in \mathbb{Z}} |x - p|$ la distance au plus proche entier (ou bien la distance à l'origine 0 dans $\mathbb{T}^1$ mesurée sur le cercle).

2.1.1. Conditions arithmétiques sur un nombre réel. — Un traitement plus complet peut se trouver dans plusieurs textes, dont [20], [5], [25]. Soient $c > 0$, $\tau \geq 0$. Nous définissons les ensembles de nombres réels suivants

$$\begin{aligned}\mathbb{CD}(c, \tau) &= \left\{ \alpha \in \mathbb{T}^1 \setminus \mathbb{Q} \mid \forall N \geq 1 \quad \|N\alpha\| \geq \frac{c}{N^{1+\tau}} \right\} \\ \mathbb{CD}(\tau) &= \bigcup_{c>0} \mathbb{CD}(c, \tau) \\ \mathbb{CD} &= \bigcup_{\tau \geq 0} \mathbb{CD}(\tau).\end{aligned}$$

Si α appartient à $\mathbb{CD}$ on dit que α vérifie une condition diophantienne. Pour tout $\tau > 0$ l'ensemble $\mathbb{CD}(\tau)$ est de mesure pleine au sens de Lebesgue. D'autre part, les ensembles $\mathbb{CD}(\tau)$ peuvent s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles fermés et d'intérieur vide, ce qui implique que ces ensembles sont petits du point de vue de la topologie (catégorie de Baire).

2.1.2. Conditions arithmétiques sur une paire. — Soient α, β des nombres réels. Soient $c > 0$, $\tau \geq 0$. Nous définissons les ensembles suivants

$$\begin{aligned}\mathbb{CD}_1(c, \tau) &= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \mid \alpha \in \mathbb{CD} \text{ et } \forall N \in \mathbb{Z} \quad \|N\alpha - \beta\| \geq \frac{c}{N^{1+\tau}} \right\} \\ \mathbb{CD}_1(\tau) &= \bigcup_{c>0} \mathbb{CD}_1(c, \tau) \\ \mathbb{CD}_1 &= \bigcup_{\tau \geq 0} \mathbb{CD}_1(\tau).\end{aligned}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{CD}$. L'ensemble $\mathbb{CD}_1^\alpha(c, \tau)$ est l'ensemble de tous les β tels que la paire (α, β) appartient à $\mathbb{CD}_1(c, \tau)$. De façon analogue on définit $\mathbb{CD}_1^\alpha(\tau)$, $\mathbb{CD}_1^\alpha$. Pour tout $\tau > 0$ l'ensemble $\mathbb{CD}_1^\alpha(\tau)$ est de mesure pleine. De plus, l'ensemble $\mathbb{CD}_1^\alpha(c, \tau)$ est un fermé d'intérieur vide. Les ensembles $\mathbb{CD}_1^\alpha(\tau)$, $\mathbb{CD}_1^\alpha$ s'écrivent comme réunions dénombrables d'ensembles du type $\mathbb{CD}_1^\alpha(c, \tau)$, et donc, ils sont maigres, en particulier leur complémentaire est dense dans le cercle.