

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ZÉRO-CYCLES DE DEGRÉ 1 SUR LES SOLIDES DE POONEN

Jean-Louis Colliot-Thélène

**Tome 138
Fascicule 2**

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 249-257

ZÉRO-CYCLES DE DEGRÉ 1 SUR LES SOLIDES DE POONEN

PAR JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

RÉSUMÉ. — B. Poonen a récemment exhibé des exemples de variétés projectives et lisses de dimension 3 sur un corps de nombres qui n'ont pas de point rationnel et pour lesquelles il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin après revêtement fini étale. Je montre que les variétés qu'il construit possèdent des zéro-cycles de degré 1.

ABSTRACT (*Zero-cycles of degree 1 on Poonen threefolds*). — B. Poonen recently produced smooth threefolds over a number field which do not have a rational point but have no Brauer–Manin obstruction even after descent to a finite étale cover. I show that the varieties he produces have zero-cycles of degree 1.

Introduction

Soit k un corps de nombres. Dans son article [10], B. Poonen construit des exemples de variétés projectives et lisses de dimension 3 sur k qui ont les propriétés suivantes : elles ont des points dans tous les complétés de k , il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un point rationnel, mieux, il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin après descente par revêtements finis étales, et cependant les variétés ne possèdent pas de point k -rationnel. C. Demarche [5] vient de montrer que ceci implique qu'aucune obstruction de

Texte reçu le 22 septembre 2008, révisé le 16 février 2009 et accepté le 26 mai 2009

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, C.N.R.S., UMR 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France • *E-mail* : jlct@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G05, 14G25, 11G35 ; 14J20, 14F22.

Mots clefs. — Points rationnels, zéro-cycles, principe de Hasse, obstruction de Brauer–Manin.

descente sous un groupe algébrique ne saurait rendre compte de l'inexistence de point rationnel. La situation est donc tout à fait différente de celle de l'exemple historique de Skorobogatov ([12], [9]).

Dans [3] j'ai conjecturé que pour toute variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 est la seule obstruction.

Je montre ici que la conjecture vaut pour les variétés construites par Poonen : elles ont toutes un zéro-cycle de degré 1. La question reste entière pour l'exemple de Skorobogatov.

Au paragraphe 1 je rappelle brièvement la construction des variétés. Au paragraphe 2 je donne une démonstration alternative du calcul du groupe de Brauer de ces variétés. Le résultat de ce calcul permet de montrer ([10]) qu'il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un point rationnel, et *a fortiori* pas d'obstruction de Brauer-Manin à l'existence de zéro-cycles de degré 1. Au paragraphe 3, logiquement indépendant du précédent, j'établis l'existence de zéro-cycles de degré 1. La méthode utilisée dans ce paragraphe est une variante pour les zéro-cycles d'une méthode connue dans le cas des points rationnels (voir les remarques 3.2 et 3.3 ci-dessous).

Cet article a été conçu à l'occasion d'exposés donnés en avril 2008 à l'université Emory (Atlanta, Géorgie).

1. Les variétés

Soit k un corps de caractéristique nulle. Les variétés considérées dans [10] s'insèrent dans le diagramme suivant, que nous allons détailler.

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \times \mathbb{P}^1 & \rightarrow & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \rightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Dans ce diagramme, toutes les variétés sont des k -variétés projectives, lisses, géométriquement connexes. La variété C est une courbe de genre quelconque. Dans [10], les courbes C utilisées n'ont qu'un nombre fini de points rationnels, nous ne faisons pas cette restriction ici.

Les flèches verticales inférieures sont données par la projection sur le premier facteur. La variété V est de dimension 3, elle est fibrée en coniques sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Le lieu de dégénérescence de cette fibration (le lieu où la conique fibre est singulière) est une k -courbe projective, lisse, *géométriquement intègre*

$Z_1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. La projection sur le premier facteur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ induit un revêtement ramifié $Z_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, le lieu de ramification dans $\mathbb{P}^1$ ne contient pas le point $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$.

Le morphisme $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un revêtement ramifié, son lieu de ramification dans $\mathbb{P}^1$ ne rencontre pas le lieu de ramification de $Z_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

La partie verticale gauche du diagramme est obtenue par rétrotirette à partir de la partie verticale droite (produits fibrés via le morphisme $C \rightarrow \mathbb{P}^1$).

Pour tout point schématique $w \in \mathbb{P}^1$, de corps résiduel $k(w)$, la fibre V_w est une surface géométriquement intègre sur $k(w)$ qui contient un ouvert affine d'équation

$$y^2 - az^2 = P_w(x)$$

avec $a \in k \setminus k^2$ et $P_w(x) \in k(w)[x]$ un polynôme non nul, de degré 4 en la variable x , séparable pour w non dans le lieu de ramification de $Z_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Sur un ouvert convenable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, Z_1 est défini par l'équation $P_w(x) = 0$, la projection $Z_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ étant donnée par $(w, x) \mapsto w$.

Le lieu de dégénérescence de la fibration en coniques $X \rightarrow C \times \mathbb{P}^1$ est l'image inverse Z de Z_1 par $C \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Le polynôme $P_w(x)$ est choisi tel que que $Z \subset C \times \mathbb{P}^1$ est une k -courbe projective, lisse, *géométriquement intègre* ([10], Lemma 7.1).

Par ailleurs la description des fibres de l'application composée $V \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ (première projection) montre que l'on a :

PROPOSITION 1.1. — *Sous les hypothèses faites ci-dessus, pour tout point schématique P de C , la fibre $X_P/k(P)$ du morphisme $X \rightarrow C$ au point P est une $k(P)$ -variété géométriquement intègre.*

D'après [4, I, p. 43], [11, p. 208-209], [1, §3.2]), ceci a le corollaire suivant, qui sera utilisé au paragraphe 3.

COROLLAIRE 1.2. — *Soient k un corps de nombres et $X \rightarrow C$ comme ci-dessus. Il existe un ensemble fini S de places de k tel que, pour toute extension finie L de k et toute place w de L non située au-dessus d'une place de S , l'application $X(L_w) \rightarrow C(L_w)$ induite par $X \rightarrow C$ sur les points de X à valeurs dans le complété L_w soit surjective.*

2. Leur groupe de Brauer

Le résultat suivant est établi dans [10] au moyen d'une étude de l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard géométrique de X . Nous proposons une démonstration un peu plus courte. La différence entre la démonstration de [10] et la présente démonstration est essentiellement la même que celle entre les propositions 7.1.1 et 7.1.2 de [13].

PROPOSITION 2.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, la flèche naturelle de groupes de Brauer $\mathrm{Br} C \rightarrow \mathrm{Br} X$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Notons $B = C \times \mathbb{P}^1$. La fibration en coniques $X \rightarrow B$ est dégénérée en un seul point de codimension 1 de B , correspondant à la courbe géométriquement intègre Z .

Soit η le point générique de B et X_η la fibre générique de $X \rightarrow B$. C'est une conique lisse.

De façon générale, étant donné un k -morphisme plat $X \rightarrow B$ de k -variétés lisses géométriquement intègres, on dispose d'un diagramme commutatif de suites exactes de groupes de cohomologie étale :

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \mathrm{Br} B \rightarrow \mathrm{Br} k(B) & \xrightarrow{\oplus_b \partial_b} & \bigoplus_{b \in B^{(1)}} H^1(k(b), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow e_{x/b} \cdot \mathrm{Res}_{k(b)/k(x)} \\ 0 \rightarrow \mathrm{Br} X \rightarrow \mathrm{Br} X_\eta & \xrightarrow{\oplus_x \partial_x} & \bigoplus_{x \in B^{(1)}} \bigoplus_{x \in X^{(1)}, x \rightarrow b} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array}$$

Dans ce diagramme, b parcourt les points de codimension 1 de B , et x parcourt les points de codimension 1 de X qui ne sont pas situés sur X_η . Pour $x \in X$ d'image $b \in B$, on a l'inclusion des corps résiduels $k(b) \subset k(x)$. L'entier $e_{x/b}$ est l'indice de ramification de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X,x}$ sur l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{B,b}$, c'est-à-dire la valuation dans $\mathcal{O}_{X,x}$ de l'image d'une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$ par l'inclusion $\mathcal{O}_{B,b} \subset \mathcal{O}_{X,x}$. Les flèches ∂ sont les flèches de résidu.

On peut extraire un tel diagramme des exposés de Grothendieck sur le groupe de Brauer ([7], voir GB II, Cor. 1.10, GB III, Prop. 2.1, GB III, Thm. 6.1). Pour plus de détails, voir par exemple [2, §3] et [6, Chapter 6]. La démonstration combine les suites de localisation, leur fonctorialité et le théorème de pureté pour le groupe de Brauer.

Dans la présente situation, la fibre générique est une conique sur $k(B)$. Soit $\beta \in \mathrm{Br} k(B)$ la classe de l'algèbre de quaternions associée à cette conique. Cette classe β est non triviale, elle admet un unique résidu non trivial, au point générique de Z , et la classe correspondante est la classe de $a \in k^*/k^{*2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2) \subset H^1(k(Z), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Pour la conique X_η sur $k(B)$ sans point rationnel, on dispose de la suite exacte classique (cf. [12] p. 138)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathrm{Br} k(B) \rightarrow \mathrm{Br} X_\eta \rightarrow 0,$$

où la flèche $\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathrm{Br} k(B)$ envoie 1 sur la classe β . Le diagramme ci-dessus montre alors que l'application $\mathrm{Br} B \rightarrow \mathrm{Br} X$ est injective.

Soit $\alpha \in \mathrm{Br} X$. L'image de α dans $\mathrm{Br} X_\eta$ est l'image d'un élément $\gamma \in \mathrm{Br} k(B)$, défini à addition près de β .