Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COMPACTIFICATION DE VARIÉTÉS DE SIEGEL AUX PLACES DE MAUVAISE RÉDUCTION

Benoît Stroh

Tome 138
Fascicule 2

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 259-315

Bull. Soc. math. France
138 (2), 2010, p. 259–315

COMPACTIFICATION DE VARIÉTÉS DE SIEGEL AUX PLACES DE MAUVAISE RÉDUCTION

PAR BENOÎT STROH

RÉSUMÉ. — Nous construisons des compactifications toroïdales arithmétiques du champ de modules des variétés abéliennes principalement polarisées munies d'une structure de niveau parahorique. Pour ce faire, nous étendons la méthode de Faltings et Chai [7] à un cas de mauvaise réduction. Le voisinage du bord des compactifications obtenues n'est pas lisse, mais a pour singularités celles des champs de modules de variétés abéliennes avec structure parahorique de genre plus petit. Nous sommes amenés à reprendre la construction des compactifications sans niveau de Faltings et Chai, en modifiant l'étape d'approximation pour préserver le groupe de p-torsion des variétés abéliennes. Nous donnons comme application une nouvelle preuve de l'existence du sous-groupe canonique pour des familles de variétés abéliennes.

ABSTRACT (*Compactification of Siegel modular varieties with bad reduction*)
We construct arithmetic toroidal compactifications of the moduli stack of principally polarized abelian varieties with parahoric level structure. To this end, we extend the methods of Faltings and Chai [7] to a case of bad reduction. Our compactifications are not smooth near the boundary; the singularities are those of the moduli stacks of abelian varieties with parahoric level structure of lower genus. We modify Faltings and Chai's construction of compactifications without level structure. The key point is that our approximation preserves the p-torsion subgroup of the abelian varieties. As an application, we give a new proof of the existence of the canonical subgroup for some families of abelian varieties.

Texte reçu le 13 janvier 2009, révisé le 31 octobre 2009

BENOÎT STROH • *E-mail :* `stroh@math.univ-paris13.fr`, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

Classification mathématique par sujets (2000). — 14K10, 14G35.

Mots clefs. — Variétés abéliennes, variétés modulaires de Siegel, compactifications toroïdales, structure au niveau parahorique, mauvaise réduction, sous-groupe canonique.

© Société Mathématique de France

Dans cet l'article, g désigne un entier naturel et l'on note $\mathcal{A}_g$ le champ de modules des schémas abéliens principalement polarisés de genre g. Ce champ est algébrique et lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, mais pas propre. En effet, le critère valuatif de propreté n'est pas vérifié car si R est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, il existe des variétés abéliennes principalement polarisées sur $\mathrm{Spec}(K)$ qui ne se prolongent pas en des schémas abéliens sur $\mathrm{Spec}(R)$. Il est donc naturel de construire des compactifications de $\mathcal{A}_g$. Ce problème, initié par Mumford, est riche d'une longue histoire [16]. Ash, Mumford, Rapoport et Tai [3] d'une part, Faltings et Chai [7] d'autre part, ont construit des *compactifications toroïdales* de $\mathcal{A}_g$. Ces dernières sont des champs algébriques dépendant du choix d'un éventail Σ. Notons

$$\overline{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$$

la compactification toroïdale associée à un tel éventail Σ. Sous une hypothèse de nature combinatoire sur Σ, le champ

$$\overline{\mathcal{A}}_g^{\Sigma}$$

est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et le complémentaire de $\mathcal{A}_g$ forme un diviseur à croisements normaux. La stratification induite par ce diviseur est paramétrée par Σ et l'on peut associer à chaque strate un rang $r \leq g$. Le complété formel de la compactification le long d'une strate de rang r est isomorphe au complété formel d'un certain fibré en plongements toriques $\overline{\mathcal{M}}^r \to \mathcal{B}^r$ le long d'une strate, où $\mathcal{B}^r \to \mathcal{A}_{g-r}$ est un schéma abélien.

Si $g \geq 2$, on ne dispose malheureusement pas d'interprétation modulaire des compactifications toroïdales de $\mathcal{A}_g$. On peut toutefois affirmer qu'elles paramètrent "tous les schémas semi-abéliens sur les traits qui sont génériquement des schémas abéliens principalement polarisés". La propreté de ces compactifications résulte alors du critère valuatif et du théorème de réduction semi-stable pour les variétés abéliennes [**SGA 7** IX th. 3.6].

Énoncé du théorème principal. — Dans la suite de l'article, on fixe un nombre premier p, un entier $s \leq g$ et un ensemble ordonné non vide

$$\mathcal{D} = \{d_1 < d_2 < \cdots < d_s\} \subset \{1, \cdots, g\}\,.$$

Définissons le champ $\mathcal{A}_{g,0}$ comme l'espace de modules relatif sur $\mathcal{A}_g$ qui paramètre les drapeaux de sous-groupes finis, plats et totalement isotropes

$$H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_s$$

du groupe de p-torsion de la variété abélienne universelle, tels que H_i soit de rang d_i pour tout $i \leq s$. On dit que $\mathcal{A}_{g,0}$ est le champ des schémas abéliens principalement polarisés de genre g munis d'une structure de niveau parahorique de type $\mathcal{D}$ en p. Ce champ est algébrique mais n'est pas lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$; on

dit qu'il a *mauvaise réduction* en p. Il n'est pas propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, et le but de cet article est d'en construire des compactifications toroïdales. Bien sûr, on ne peut pas obtenir de compactifications lisses ; on voudrait toutefois contrôler leurs singularités. Le résultat suivant sera précisé dans le théorème 3.1.8.3.

Théorème principal. — *Il existe un champ algébrique canonique* $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\Sigma}$ *qui est propre sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$*, qui contient* $\mathcal{A}_{g,0}$ *comme ouvert dense et tel qu'il existe une flèche propre*

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\Sigma} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g}^{\Sigma}$$

prolongeant le morphisme d'oubli du niveau. Le champ $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\Sigma}$ *est muni d'une stratification paramétrée par* Σ *et l'on peut décrire son complété formel le long d'une strate par certains fibrés en plongements toriques. En particulier, ses singularités sont produits de singularités toriques et des singularités des champs* $\mathcal{A}_{g-r,0}$ *pour* $r \geq 0$.

La présence de singularités toriques est due au caractère trop restrictif du choix combinatoire Σ. Pour remédier à ce problème, nous remplaçons le choix de Σ par celui d'un éventail $\mathfrak{S}$ recouvrant un complexe conique adéquat. Dans le théorème 3.2.7.1, nous construisons une compactification toroïdale « améliorée » dépendant de $\mathfrak{S}$. Ses singularités sont celles des champs $\mathcal{A}_{g-r,0}$ pour $r \geq 0$. En particulier, la compactification améliorée est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$ et le complémentaire de $\mathcal{A}_{g,0}$ est un diviseur à croisements normaux.

La méthode de Faltings et Chai utilise de manière cruciale la lissité de $\mathcal{A}_g$, et n'est donc pas directement transposable aux cas de mauvaise réduction. Nous contournons ce problème en reprenant la construction des compactifications de $\mathcal{A}_g$ et en la modifiant. En particulier, notre approximation sur la variété sans niveau *préserve le sous-groupe de p-torsion.* On trouvera donc dans cette thèse la construction simultanée des compactifications de $\mathcal{A}_g$ et de $\mathcal{A}_{g,0}$. Nous donnons une présentation différente des résultats de [7] en introduisant les notions de 1-motif de Mumford et de catégorie fibrée à la frontière.

La technique utilisée ici est transposable à de multiples cas P.E.L, comme celui des variétés de Hilbert-Siegel ou celui des variétés de Shimura unitaires, en utilisant les résultats de [10] et de [9]. Toutefois, la construction de compactifications toroïdales en une place de mauvaise réduction qui divise le degré de la polarisation ou le discriminant de l'anneau d'endomorphismes reste un problème ouvert ; les méthodes de [7] ne semblent pas s'y adapter.

Nous donnons comme application une nouvelle preuve de l'existence du sous-groupe canonique pour des familles de variétés abéliennes, due à Abbès et Mokrane [1] et à Andreatta et Gasbarri [2]. Nous utilisons une idée due à Vincent Pilloni. Supposons que $\mathcal{D} = \{g\}$; on parle alors de *structure de niveau de Siegel.* Soit $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$ (resp. $\overline{\mathcal{A}}_g$) une compactification toroïdale de $\mathcal{A}_{g,0}$ (resp.

de $\mathcal{A}_g$). Nous définissons le lieu ordinaire $\overline{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{ord}}$ de $\overline{\mathcal{A}}_g \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et le lieu ordinaire-multiplicatif $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathrm{ord-mult}}$ de $\overline{\mathcal{A}}_{g,0} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Nous montrons que la section de $\mathcal{A}_g^{\mathrm{ord}}$ dans $\mathcal{A}_{g,0}^{\mathrm{ord-mult}}$ donnée par le noyau du morphisme de Frobenius s'étend en une section

$$\overline{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{ord}} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathrm{ord-mult}}.$$

Nous en déduisons le théorème suivant grâce à la « surconvergence du tube », démontrée dans [4, th. 1.3.5].

Théorème. — *La section de $\overline{\mathcal{A}}_g^{\mathrm{ord}}$ dans $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}^{\mathrm{ord-mult}}$ induit un isomorphisme entre des voisinages stricts des tubes de chacun de ces deux schémas dans les espaces rigides associés à $\overline{\mathcal{A}}_g$ et à $\overline{\mathcal{A}}_{g,0}$.*

Ce théorème montre l'existence du sous-groupe canonique sur un voisinage strict du tube du lieu ordinaire. Notre méthode ne permet pas de préciser quantitativement ce voisinage, contrairement à [1] et à [2].

Plan de l'article. — Dans la première partie, on définit la notion de groupe de p-torsion d'un 1-motif et celle de structure de niveau parahorique sur un 1-motif. On traite de la construction de Mumford et l'on introduit la catégorie des 1-motifs de Mumford, qui est une version plus synthétique de la catégorie $\mathrm{DD}_{\mathrm{pol}}$ de Faltings et Chai. On décrit également les espaces de modules de 1-motifs avec et sans niveau.

Dans la seconde partie, nous construisons les cartes locales formelles des compactifications. Nous compactifions partiellement de manière torique les espaces de modules de 1-motifs, en utilisant leur description comme torseurs sous des tores ; c'est ici qu'intervient le choix combinatoire Σ. Nous complétons ces compactifications partielles le long de strates, pour pouvoir effectuer une construction de Mumford. On remarque que le groupe de p-torsion du quotient à la Mumford est une donnée algébrique, qui existe sur l'espace de modules des 1-motifs avant complétion ; cela s'avérera essentiel dans la suite. Nous approximons ensuite le résultat de la construction de Mumford. C'est l'étape la plus délicate de la construction sans niveau, qui requiert la lissité des espaces de modules. En effet, il faut s'assurer que l'approximation n'entraîne pas de perte d'information (proposition 2.3.4.1). Ce contrôle s'effectue grâce à l'isomorphisme de Kodaira-Spencer (proposition 2.2.1), qui n'existe que sur des bases lisses. Nous construisons une approximation préservant le groupe de p-torsion (proposition 2.3.3.1) ; cela a un sens puisque ce groupe est une donnée algébrique. Nous définissons enfin les cartes locales algébriques. Celles relatives à $\mathcal{A}_{g,0}$ n'auraient aucun intérêt si le groupe de p-torsion n'avait pas été préservé lors de l'approximation.