

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

TRANSFORMÉE DE RADON SEMI-GLOBALE

Mehdi Benchoufi

**Tome 139
Fascicule 2**

2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 145-161

TRANSFORMÉE DE RADON SEMI-GLOBALE

PAR MEHDI BENCHOUFI

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous nous proposons d'étudier le noyau, l'image et une éventuelle formule d'inversion de la transformation de Radon réelle dans les domaines linéairement concaves. Nous rappelons que, dans $\mathbb{R}^2$, on sait reconstruire une fonction à partir de sa transformation de Radon lorsque celle-ci est connue le long de toutes les droites de l'espace. Notre propos sera, en quelque sorte, d'établir une version semi-globale de ce résultat. Nous verrons ainsi que, modulo un noyau que nous préciserons, constitué de sauts de fonctions holomorphes, chacune définie sur un « wedge » et vérifiant dans leurs domaines respectifs une majoration en $\mathcal{O}(\frac{1}{|z|^2})$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini, une formule d'inversion est accessible dès lors que la transformation de Radon n'est connue qu'au voisinage d'une droite.

ABSTRACT (*Semi-global Radon Transformation*). — In this article, we mean to study the kernel, the image and a possible inversion formula for the real Radon transform in linearly concave domains. We recall that, in $\mathbb{R}^2$, we know how to reconstruct a function from its Radon transform when the latest is known all along every lines of the space. Our purpose will be somehow to establish a semi-global analogue of this result. In this way, we will see that, modulo a kernel we will precise, consisting of jumps of holomorphic functions, each of which is defined upon a “wedge” and submitted to an estimation in $\mathcal{O}(\frac{1}{|z|^2})$ when $|z|$ tends to infinity, an inversion formula is reachable as soon as the Radon transform is known in the neighbourhood of a line.

Texte reçu le 31 juillet 2006, révisé les 20 mars 2009 et 27 juillet 2009, accepté le 21 septembre 2009

MEHDI BENCHOUFI, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175, rue du Chevaleret 75013 Paris • E-mail : benchoufi@math.jussieu.fr
Classification mathématique par sujets (2000). — 32A26, 44A12.

Mots clefs. — Transformée de Radon, semi-globale, analyse complexe.

1. Introduction

Commençons par définir la transformation de Radon réelle.

DÉFINITION 1.1 (Funk [3], Radon [12]). — On représente un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ par l'équation : $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \theta, x \rangle = t\}$ où $\theta \in S^{n-1} = \{\theta \in \mathbb{R}^n \mid |\theta| = 1\}$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour toute fonction f , de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur tous les hyperplans de $\mathbb{R}^n$, et pour tous $(\theta, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$, on définit la transformation de Radon réelle $(Rf)_{\mathbb{R}}(\theta, t)$ par la formule suivante :

$$(Rf)_{\mathbb{R}}(\theta, t) = \int_{\langle \theta, x \rangle = t} f(x) \theta \cdot dx \rfloor dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Ici $\theta \cdot dx = \sum_{i=1}^n \theta_i dx_i$ et $\theta \cdot dx \rfloor dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ désigne la forme ω telle que $\theta \cdot dx \wedge \omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Dans cet article, on considèrera la restriction de cette transformation à un domaine linéairement concave, c'est-à-dire une réunion d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$. Dans un esprit assez proche, on peut définir la transformation de Radon complexe. C'est ce qui amène à la définition suivante :

DÉFINITION 1.2 (Martineau [11], Gindikin, Henkin [5] : Transformation de Radon complexe)

Soit K un compact linéairement convexe dans $\mathbb{CP}^n$ et $\Omega = \mathbb{CP}^n \setminus K$, $f \in \mathcal{C}_{n,n-1}(\Omega)$, telle que $\bar{\partial}f = 0$. Alors on définit la transformation de Radon complexe de f par la formule suivante :

$$(Rf)_C(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \Omega} \bar{\partial}_z \left(\frac{\xi_0 \cdot z_0}{\langle \xi, z \rangle} \right) \wedge f, \xi \in K^*.$$

Ici K^* désigne l'ensemble des éléments de $\mathbb{CP}^n$ tels que $\{z \in \mathbb{CP}^n \mid \langle \xi, z \rangle = \xi_0 z_0 + \cdots + \xi_n z_n = 0\} \subset \mathbb{CP}^n \setminus K$, avec $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ et $z = (z_0, z_1, \dots, z_n)$. Et $\mathcal{C}_{n,n-1}(\Omega)$ désigne l'espace des $(n, n-1)$ -formes continues sur Ω .

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, et Ω^* son domaine dual, i.e. l'ensemble des hyperplans contenus dans Ω . On dira que Ω est un *domaine linéairement concave* si par chacun de ses points passe un hyperplan contenu dans Ω . On dira que Ω est un *domaine fortement linéairement concave* si par chacun de ses points passe un hyperplan contenu dans Ω et s'il existe une détermination $\mathcal{C}^1$ de ces hyperplans par les points de Ω .

Un problème qui se pose alors naturellement est celui de la reconstitution de la fonction f à partir de sa transformée de Radon réelle. Pour ce qui est du cas global, i.e. du cas où la transformée de Radon est connue le long de tous les hyperplans de l'espace $\mathbb{R}^n$, les résultats sur l'injectivité et la surjectivité relatifs à des espaces de départ et d'arrivée bien précis ont été obtenus successivement par Radon [12], John [9] et par Gelfand, Graev, Vilenkin [4], Helgason [6],...

Ainsi, lorsque la transformation de Radon d'une fonction est connue le long de l'ensemble des hyperplans de l'espace $\mathbb{R}^n$, il est possible de reconstituer la valeur de cette même fonction en chaque point via une formule découverte par Radon [12], qu'il est convenu d'appeler *formule explicite d'inversion de Radon*. On peut, après cela, se poser la question plus générale de l'existence d'une formule d'inversion dès lors que la transformation de Radon d'une fonction est seulement connue le long d'hyperplans contenus dans un domaine linéairement concave de l'espace $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas complexe, et plus précisément, dans les domaines fortement linéairement concaves de $\mathbb{CP}^n$, le résultat suivant a été établi :

THÉOREME 1.3 (Gindikin, Henkin [5] ; Henkin, Polyakov [8])

Soit D un domaine fortement linéairement concave de $\mathbb{CP}^n$. Pour toute forme f , $\bar{\partial}$ -fermée, appartenant à $\mathcal{C}_{0,n-1}^1(D)$, espace des $(0, n-1)$ -formes de classe $\mathcal{C}^1$ sur D , il existe des opérateurs explicites Ξ et H , qui permettent la représentation suivante :

$$f = \Xi((Rf)_{\mathbb{C}}) + \bar{\partial}Hf$$

(La définition de la concavité forte pour les domaines complexes est exactement similaire à celle des domaines réelles ; il suffit de remplacer « hyperplan réel » par « hyperplan complexe »). C'est dans cet esprit qu'Henkin [7](Theo.5), a annoncé la possibilité de déduire de la formule précédente un résultat semblable pour la transformation de Radon réelle.

A présent, quelques notations et hypothèses utiles pour la suite du texte.

Dans cet article, nous n'envisagerons que le cas $n = 2$.

Désignons d'abord par Ω un domaine fortement linéairement concave de $\mathbb{R}^2$, distinct de $\mathbb{R}^2$, et par Ω^* l'ensemble des droites, paramétrées par un sous-ensemble de $S^1 \times \mathbb{R}$, contenues dans Ω . Un élément (θ, t) de $S^1 \times \mathbb{R}$ paramétrisera la droite $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | t + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 = 0\}$. Nous noterons $\pi(\Omega^*)$, la projection de Ω^* sur S^1 . De manière plus uniforme, nous pourrions choisir de présenter Ω , comme le complémentaire d'un compact convexe non vide de $\mathbb{RP}^2$.

Par ailleurs, dans notre article, nous serons amené à utiliser un ensemble $\Omega_{\mathbb{C}}$, construit en complexifiant chacune des droites contenues dans Ω , tel que $\Omega \subset \Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{CP}^2$. Nous noterons alors $\Omega_{\pm}$ les deux composantes connexes de $\Omega_{\mathbb{C}} \setminus \Omega$.

Nous noterons $\mathcal{C}^{n,m}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, $n, m \in \mathbb{N}$, la classe des fonctions f de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, appartenant à $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, telles que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} (1 + |x|)^m \left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^i \partial x_2^j} f(x) \right| < \infty.$$

$$k = 0, 1, \dots, m; i + j = k.$$

Le plan de Henkin [7] consisterait à montrer que, pour un domaine Ω linéairement concave de $\mathbb{R}^2$, et pour une fonction f , il existe un opérateur $B_{\mathbb{R}}$, à valeur dans l'espace des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{C}$ et des opérateurs $K_{\pm}$ à valeurs dans l'espace des fonctions holomorphes dans $\Omega_{\pm}$, vérifiant dans leurs domaines respectifs une majoration en $\mathcal{O}(\frac{1}{|z|^2})$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini, qui permettent la décomposition

$$f = B((Rf)_{\mathbb{R}}) + K_+f + K_-f.$$

Le but de cet article n'est pas seulement de démontrer l'existence de tels opérateurs mais d'en donner des formules explicites. Les formules que nous nous proposons d'exhiber peuvent recevoir des applications en tomographie.

Nous nous proposons donc d'étudier la transformation de Radon réelle dans des domaines linéairement concaves. Plus précisément, on cherche d'abord à obtenir une caractérisation de son noyau. On montrera que ce dernier consiste en des sauts de fonctions holomorphes, définies sur des « wedge » que nous préciserons par la suite et vérifiant dans leurs domaines respectifs une majoration en $\mathcal{O}(\frac{1}{|z|^2})$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini. Ceci nous amènera au résultat annoncé par Henkin dans [7] :

THÉOREME 1.4. — *Soit f appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ et intégrable sur les droites de Ω^* . On suppose que la transformation de Radon réelle s'annule sur l'ensemble des droites d'un domaine fortement linéairement concave Ω . Alors f se décompose en la différence de 2 fonctions holomorphes définies respectivement dans les domaines $\Omega_{\pm}$, et vérifiant dans leurs domaines respectifs une majoration du type $f_{\pm}(z) = \mathcal{O}(\frac{1}{|z|^2})$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini. On a*

$$f_{\pm}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\langle \vartheta(z), \xi - z \rangle = 0, \Im(\xi) = \vartheta(z)^{\perp}} f(\Re(\xi)) \det(\vartheta(z), \frac{\Im(\xi)}{\langle \Im(\xi), \Re(\xi) - z \rangle}) (\vartheta(z) d\xi) \rfloor \omega(\xi)$$

pour $z \in \Omega_{\pm}$.

Ici ω désigne la 2-forme $\omega(\xi) = d\xi_1 \wedge d\xi_2$ et ϑ est une application continue, dite section de Leray, du domaine $\Omega_{\mathbb{C}}$ dans S^1 , que nous construirons dans la partie 2. On note $\langle \vartheta(z), \xi - z \rangle = \vartheta_1(z)(\xi_1 - z_1) + \vartheta_2(z)(\xi_2 - z_2)$. Nous noterons $\vartheta(z)^{\perp}$ l'élément $(-\vartheta_2(z), \vartheta_1(z))$. Nous verrons que ϑ sera choisie de manière particulière : le domaine d'intégration $\{\xi \in \mathbb{C}^2 \mid \langle \vartheta(z), \xi - z \rangle = 0, \Im(\xi) = \frac{\vartheta(z)^{\perp}}{|\vartheta(z)^{\perp}|}\}$ sera alors constitué d'une droite réelle « pointée » en un élément du plan imaginaire.

C'est au cours de la démonstration de ce théorème que nous démontrerons la proposition fondamentale suivante, qui rapporte le $\bar{\partial}$ de $f_{\pm}$ et la transformation de Radon de f .