Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SOUS-GROUPES H-LOXODROMIQUES

Antonin Guilloux

Tome 139
Fascicule 2

2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 163-191

Bull. Soc. math. France
139 (2), 2011, p. 163–191

SOUS-GROUPES H-LOXODROMIQUES

PAR ANTONIN GUILLOUX

RÉSUMÉ. — On considère une extension finie k de $\mathbb{Q}_p$, avec p un nombre premier, H un sous-groupe d'indice fini de k^* et le groupe $\mathrm{SL}(n,k)$.

Nous montrons que $\mathrm{SL}(n,k)$ admet un sous-groupe $\mathbb{Q}_p$-Zariski-dense dont toutes les matrices ont leur spectre inclus dans H si et seulement si soit -1 est dans le sous-groupe H, soit n n'est pas congru à 2 modulo 4.

ABSTRACT (*H-loxodromic subgroups*). — Consider k a finite extension of $\mathbb{Q}_p$, with p a prime number. Let H be a finite index subgroup of k^* and G be the group $\mathrm{SL}(n,k)$ with its Zariski topology of $\mathbb{Q}_p$-group. We investigate the existence of a subgroup of G which is Zariski-dense and such that each of its elements has a spectrum included in H.

A necessary and sufficient condition is obtained: such a subgroup exists if and only if either -1 belongs to H or the dimension n is not congruent to 2 modulo 4.

1. Introduction

Dans ce texte, nous les sous-groupes de $\mathrm{SL}(n,k)$ — où k est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ — dont toutes les matrices ont leur spectre inclus dans un sous-groupe d'indice fini H de k^*. Nous arrivons au résultat d'existence suivant :

Texte reçu le 23 février 2007, révisé les 16 décembre 2008, 6 novembre 2009 et 2 décembre 2009, accepté le 5 octobre 2010

ANTONIN GUILLOUX, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France • *E-mail :* `antonin.guilloux@umpa.ens-lyon.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14L35, 20G30.

Mots clefs. — Proximalité, loxodromie, corps p-adiques.

Théorème 1.1. — *Soient n un entier supérieur à 2, k une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, où p est un nombre premier, et H un sous-groupe d'indice fini de k^*.*

Alors $\mathrm{SL}(n,k)$ *admet un sous-groupe $\mathbb{Q}_p$-Zariski-dense dont toutes les matrices ont toutes leurs valeurs propres dans H si et seulement si ou bien -1 est dans H, ou bien n n'est pas congru à 2 modulo 4.*

Remarque 1.2. — Dans tout ce texte, nous considérons $\mathrm{SL}(n,k)$ comme un $\mathbb{Q}_p$-groupe et il hérite de ce fait d'une topologie de Zariski. Ce *n'est pas* sa topologie de Zariski de k-groupe que nous ne considérerons jamais. Pour éviter toute confusion, nous utiliserons les expressions « $\mathbb{Q}_p$-Zariski-dense », « $\mathbb{Q}_p$-fermé de Zariski », etc.

En guise d'illustration de ce théorème, explicitons-le dans un cas simple :

Corollaire 1.3. — *On peut trouver dans* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$ *un sous-groupe Zariski-dense dont toutes les valeurs propres sont des carrés si et seulement si n n'est pas congru à 2 modulo 4 ou bien p est congru à 1 modulo 4.*

Dans l'article « Automorphismes des cônes convexes » [4], Yves Benoist démontre notamment que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ admet un sous-groupe Zariski-dense dont toutes les matrices ont leur spectre inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si n n'est pas congru à 2 modulo 4. Notre résultat en est un analogue dans le cadre des corps locaux non-archimédiens. On remarque que le fait de se placer sur un corps local non-archimédien ne change pas la condition donnée dans [4] pour le cas réel, sauf si -1 est dans H, auquel cas il n'y a aucune obstruction à l'existence de ces sous-groupes.

Mentionnons aussi que dans le cas réel, les sous-groupes de $\mathrm{SL}(n,k)$ préservant un cône convexe propre sont l'objet de la belle théorie des convexes divisibles développée principalement par Y. Benoist [5, 6, 7, 8] et que ces sous-groupes ont toutes leurs valeurs propres positives. Il serait intéressant de disposer d'une notion géométrique analogue dans le cas p-adique ; et le cas échéant de développer une théorie des cônes divisibles. Pour l'instant les outils géométriques pertinents m'échappent, et en premier lieu la notion de convexité. Précisons que l'étude faite dans cet article pour le groupe $\mathrm{SL}(n,k)$ pourrait être menée avec les mêmes outils pour d'autres groupes. J'ai préféré me restreindre, en l'absence de motivations géométriques bien établies, à ce cas particulier où les idées à mettre en œuvre apparaissent bien.

L'ingrédient principal de la preuve de ce théorème est l'étude des éléments proximaux (i.e. ayant une valeur propre de module strictement dominant) et loxodromiques (toutes les valeurs propres de modules distincts) dans les groupes p-adiques. En effet, nous construisons, quand les conditions du théorème sont vérifiées, un sous-groupe $\mathbb{Q}_p$-Zariski-dense dont tous les éléments sont diagonalisables de valeurs propres de modules distincts.

Les éléments proximaux dans le groupe spécial linéaire ont été beaucoup étudiés et utilisés. Citons en particulier les travaux de Gol'dsheid-Margulis [11], Abels-Margulis-Soifer [1] qui démontrent l'existence et l'abondance d'élément proximaux dans les sous-groupes Zariski-denses de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ (et bien sûr d'autres groupes). Pour les éléments loxodromiques, on trouve ces résultats dans Abels-Margulis-Soifer [1], Benoist-Labourie [9] et Prasad [14].

Notre premier résultat est un analogue de ces travaux, à savoir qu'il existe des éléments loxodromiques en abondance dans les sous-groupes $\mathbb{Q}_p$-Zariski-denses de $\mathrm{SL}(n,k)$ dont les matrices sont trigonalisables sur k :

Théorème 1.4. — *Soit k une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Si Γ est un sous-groupe $\mathbb{Q}_p$-Zariski-dense de $\mathrm{SL}(n,k)$ dont toutes les matrices ont leur spectre inclus dans k, alors Γ contient au moins un élément diagonalisable sur k à valeurs propres de modules distincts.*

De plus ces éléments forment un ensemble $\mathbb{Q}_p$-Zariski-dense de Γ.

Mentionnons que Platonov [13] obtient aussi des généralisations du théorème de Gol'dsheid-Margulis au cas p-adique, pour $\mathrm{SL}(n,k)$ et pour d'autres groupes algébriques. Cependant, notre résultat n'en découle pas directement. L'existence d'un élément loxodromique est prouvée dans la partie 2 (voir le théorème 2.5), et dans la partie 5 nous expliquons comment en déduire leur abondance (voir la proposition 5.7).

Dans la partie 3, nous définissons deux notions géométriques qui nous permettront de construire un groupe en contrôlant les valeurs propres des éléments. D'abord nous définissons et étudions la notion de H-valuation, qui est l'analogue de la notion de positivité dans [4]. Nous étudions notamment comment le fait que toutes les valeurs propres des matrices d'un groupe soient dans H peut se comprendre avec cette notion. L'autre outil, que nous appelons H-sphère, est un revêtement fini bien choisi de l'espace projectif. Ces deux outils permettent d'appliquer des arguments de type ping-pong, à la Tits [15], pour construire des groupes de matrices diagonalisables en contrôlant leurs valeurs propres.

Cela nous mène à essayer de contrôler tout d'abord la valeur propre de plus grand module. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 1.5. — *On peut trouver dans $\mathrm{SL}(n,k)$ un sous-groupe $\mathbb{Q}_p$-Zariski-dense avec au moins un élément proximal et dont tout élément proximal a sa valeur propre de plus grand module dans H si et seulement si on a ou bien -1 est dans H ou bien n est strictement plus grand que 2.*

De plus, dans ce cas $\mathrm{SL}(n,k)$ contient un sous-groupe $\mathbb{Q}_p$-Zariski-dense dont tous les éléments sont proximaux avec leur valeur propre de plus grand module dans H.

Ce théorème est l'objet de la partie 4 ; plus précisément, il découle du théorème 4.2.

Enfin, dans la partie 5, nous nous attelons au cœur du problème, à savoir le contrôle de toutes les valeurs propres simultanément. Nous obtenons le théorème 5.1, qui implique le théorème suivant :

Théorème 1.6. — *On peut trouver dans* $\mathrm{SL}(n,k)$ *un sous-groupe* $\mathbb{Q}_p$*-Zariski-dense avec au moins un élément loxodromique et dont tous les éléments loxodromiques sont à valeurs propres dans* H *si et seulement si on a ou bien* -1 *est dans* H *ou bien* n *n'est pas congru à* 2 *modulo* 4.

De plus, dans ce cas $\mathrm{SL}(n,k)$ *contient un sous-groupe* $\mathbb{Q}_p$*-Zariski-dense dont tous les éléments sont diagonalisables avec leurs valeur propres dans* H *de modules distincts.*

Les preuves de ces deux derniers théorèmes sont similaires. La nécessité de la condition n'est pas difficile à établir. Et dans le cas où cette condition est remplie, il faut soigneusement choisir des éléments de $\mathrm{SL}(n,k)$ avec lesquels jouer au ping-pong en étant sûr que toutes les valeurs propres de tous les produits seront dans H.

Le théorème 1.1 est une conséquence directe des théorèmes 1.4 et 1.6 : on cherche un sous-groupe $\mathbb{Q}_p$-Zariski-dense de $\mathrm{SL}(n,k)$ dont tous les éléments ont toutes leurs valeurs propres dans H. Tous ces éléments sont en particulier trigonalisables. Donc, le théorème 1.4 nous assure qu'un tel sous-groupe, s'il existe, contient un élément diagonalisable, à valeurs propres de modules distincts et dans H. Le théorème 1.6 nous indique alors qu'il faut et qu'il suffit que -1 soit dans H ou bien que n ne soit pas congru à 2 modulo 4.

Cadre de la preuve. — Nous définissons ici les objets qui nous serviront tout au long du texte.

Dans toute la suite, k désignera $\mathbb{Q}_p$ ou une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ — donc un corps local muni d'une valeur absolue notée $|.|$ —, H un sous-groupe d'indice fini de k^*, et V sera un k-espace vectoriel de dimension n. On notera $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé à V et V^* son dual. On notera d l'indice de H dans k^*, et $S = k^*/H$. On remarque que H est à la fois ouvert et fermé dans k^* (1).

On définit aussi l'espace $\mathbb{Q}(V)$ des hyperplans pointés : tout élément a de $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ est vu comme un couple (kv_a, V_a) où v_a est un élément de V, et V_a est un hyperplan de V. On note alors $\mathbb{Q}(V) = \{a = (kv_a, V_a) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*) \;/\; v_a \in V_a\}$. Enfin on note X la variété des drapeaux de V.

(1) En effet il est d'intérieur non vide car une union finie de translatés de H couvre k^*. C'est un groupe, il est donc ouvert. Son complémentaire est une union finie de translatés de H, donc est lui aussi ouvert, et H est fermé.