Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FONCTIONS ENTIÈRES À VALEURS DANS UN CORPS DE NOMBRES

Mohammed Ably

Tome 139
Fascicule 2

2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 243-270

Bull. Soc. math. France
139 (2), 2011, p. 243–270

FONCTIONS ENTIÈRES À VALEURS DANS UN CORPS DE NOMBRES

PAR MOHAMMED ABLY

RÉSUMÉ. — Soit $\mathbf{\Gamma}$ un sous-groupe de rang maximal d'un corps de nombres $\mathbf{k}$. On montre qu'une fonction entière, envoyant $\mathbf{\Gamma}$ dans l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbf{k}$, de croissance analytique et arithmétique faibles est un polynôme. Ce résultat étend un théorème bien connu de Pólya. On montre également que ce résultat est à constante près optimal.

ABSTRACT (*Entire functions with values in a number field*). — Let $\mathbf{\Gamma}$ be a subgroup of maximal rank in a number field $\mathbf{k}$. We prove that any entire function on $\mathbf{\Gamma}$ with integer values in an finite extension of $\mathbf{k}$ which has slow analytic and arithmetic growth is a polynomial. This extends the well-known Pólya's theorem. We show also that this result is optimal up to a constant.

1. Introduction

En 1915, G. Pólya [7] montra grâce à une méthode d'interpolation qu'une fonction entière f vérifiant $f(\mathbf{N}) \subset \mathbf{Z}$ et dont la croissance est plus faible que la fonction $z \to 2^z$ est un polynôme.

Texte reçu le 17 septembre 2009, accepté le 19 mai 2010

MOHAMMED ABLY, UFR de mathématiques - Laboratoire Paul Painlevé - UMR 8524 du CNRS, Bât. M2, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve D'Ascq Cedex (France) • *E-mail :* `ably@math.univ-lille1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11C08, 11H06, 30D15.

Mots clefs. — Corps de nombres, fonction entière, polynôme, réseau, interpolation.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2011/243/$ 5.00

En 1978, M. Waldschmidt [10] introduisit les méthodes de transcendance dans l'étude des fonctions entières à valeurs entières et redémontra en particulier une version non optimale du résultat de Pólya ci-dessus.

En développant la preuve de Waldschmidt, F. Gramain [4] améliora en 1980 les résultats antérieurs sur l'analogue du résultat de Pólya pour les entiers de Gauss. Si $\mathbf{K}$ est un corps quadratique imaginaire et $\mathbf{Z_K}$ l'anneau des entiers de $\mathbf{K}$, il montra qu'une fonction entière f d'ordre de croissance ≤ 2 de type de croissance suffisamment petit en fonction du discriminant de $\mathbf{K}$ et vérifiant $f(\mathbf{Z_K}) \subset \mathbf{Z_K}$ est un polynôme.

Par ailleurs, d'après un résultat de P. Stäckel [8] que F. Gramain a étendu dans [5], si S est une partie dénombrable de $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$) et T une partie dense dans $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$), alors il existe une fonction entière d'ordre de croissance arbitrairement petit qui envoie S dans T.

Dans le cadre général d'un corps de nombres $\mathbf{K}$, exceptés les cas $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ et $\mathbf{K}$ quadratique imaginaire, le groupe $\mathbf{Z_K}$ considéré plongé dans $\mathbf{C}$ est dense dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ selon que $\mathbf{K}$ est réel ou complexe. Alors, en dehors de ces cas exceptionnels, vu le résultat de Stäckel, si f est une fonction entière laissant stable $\mathbf{Z_K}$, une hypothèse de nature analytique portant sur la croissance de f ne suffit pas pour montrer que f est algébrique.

Ce problème a été traité dans [1] par une méthode d'interpolation polynomiale.

Dans ce texte, nous obtenons, en utilisant une méthode de transcendance un résultat qui raffine et généralise les résultats antérieurs dans ce domaine.

Soient $\mathbf{k}$ un corps de nombres de degré $n \geq 2$ sur $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{K}$ une extension finie de $\mathbf{k}$. Soient $\mathbf{Z_K}$ l'anneau des entiers de $\mathbf{K}$ et $S_{\mathbf{K},\infty}$ l'ensemble des places archimédiennes de $\mathbf{K}$. Pour $v \in S_{\mathbf{K},\infty}$, on note $n_v = 1$ (resp. 2) si v est réelle (resp. complexe) et σ_v un plongement associé à v.

Soit $\mathbf{\Gamma}$ un sous-groupe de $\mathbf{k}$ de rang n sur $\mathbf{Z}$. On identifie $\mathbf{\Gamma}$ (voir le paragraphe 2) à un réseau de $\mathbf{R}^n$ et on désigne par $D(\mathbf{\Gamma})$ le déterminant de ce réseau. On note $\nu(\mathbf{\Gamma}) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)D(\mathbf{\Gamma})}$, où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

La norme euclidienne $\|.\|$ sur $\mathbf{R}^n$ est définie sur $\mathbf{\Gamma}$ via l'identification de $\mathbf{\Gamma}$ à un réseau de $\mathbf{R}^n$.

Si f est une fonction entière, on note $|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|$.

On obtient comme corollaire du théorème 5.1 de ce texte, le résultat suivant :

Corollaire 1.1. — *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps de nombres de degré* $n \geq 2$ *sur* $\mathbf{Q}$ *et* $\mathbf{K}$ *une extension finie de* $\mathbf{k}$ *que l'on considère plongée dans* $\mathbf{C}$ *par* σ_{v_0}. *Soit* $\mathbf{\Gamma}$ *un sous-groupe de* $\mathbf{k}$ *de rang* n *sur* $\mathbf{Z}$. *Soient* f *une fonction entière telle que* $f(\mathbf{\Gamma}) \subset \mathbf{Z_K}$ *et* $(\alpha_v)_{v\in S_{\mathbf{K},\infty}}$ *des nombres réels* > 0 *satisfaisant les conditions suivantes :*

(1) $e^{\frac{n(2-n_{v_0})}{(n-1)n_{v_0}}}\ \alpha_{v_0} \prod_{\substack{v\in S_{\mathbf{K},\infty}\\ v\neq v_0}} e^{\frac{n n_v \alpha_v}{\nu(\boldsymbol{\Gamma})n_{v_0}}} < \dfrac{\nu(\boldsymbol{\Gamma})}{ne}$,

(2) $\limsup_{R\to+\infty} \frac{\log|f|_R}{R^n} \leq \alpha_{v_0}$,

(3) *pour tout* $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \{v_0\}$ *et tout nombre réel* r *assez grand,*

$$\max_{\substack{x\in\boldsymbol{\Gamma}\\ \|x\|\leq r}} \log|\sigma_v(f(x))| \leq \alpha_v r^n.$$

Alors f *est un polynôme.*

Si le corps $\mathbf{K}$ est quadratique, ce corollaire s'énonce selon que $\mathbf{K}$ est imaginaire ou réel de la manière suivante :

COROLLAIRE 1.2. — *Soient* $\mathbf{K}$ *un corps quadratique imaginaire que l'on considère plongé dans* $\mathbf{C}$ *et* $\boldsymbol{\Gamma}$ *un sous-groupe de* $\mathbf{K}$ *de rang* 2. *Soit* f *une fonction entière telle que* $f(\boldsymbol{\Gamma}) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ *et satisfaisant la condition*

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{\log|f|_R}{R^2} < \frac{\pi}{2D(\boldsymbol{\Gamma})e}.$$

Alors f *est un polynôme.*

Ainsi, quand $\boldsymbol{\Gamma}$ est l'anneau des entiers de $\mathbf{K}$, on retrouve le résultat de F. Gramain cité ci-dessus.

COROLLAIRE 1.3. — *Soient* $\mathbf{K}$ *un corps quadratique réel, que l'on considère plongé dans* $\mathbf{C}$ *par* σ_{v_0} *et* $\boldsymbol{\Gamma}$ *un sous-groupe de* $\mathbf{K}$ *de rang* 2. *Soit* σ_{v_1} *l'autre plongement de* $\mathbf{K}$ *dans* $\mathbf{C}$. *Soient* f *une fonction entière telle que* $f(\boldsymbol{\Gamma}) \subset \mathbf{Z}_{\mathbf{K}}$ *et* α_0, α_1 *deux nombres réels positifs satisfaisant les conditions :*

(i) $\alpha_0 \exp(\frac{2D(\boldsymbol{\Gamma})\alpha_1}{\pi}) < \frac{\pi e^{-3}}{2D(\boldsymbol{\Gamma})}$,

(ii) $\limsup_{R\to+\infty} \frac{\log|f|_R}{R^2} \leq \alpha_0$,

(iii) *pour tout nombre réel* r *assez grand,*

$$\max_{\substack{u\in\boldsymbol{\Gamma}\\ \|u\|\leq r}} \log|\sigma_{v_1}(f(u))| \leq \alpha_1 r^2.$$

Alors f *est un polynôme.*

Dans le cas où $\mathbf{k}$ est un corps cyclotomique premier, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.4. — *Soit p un nombre premier $\neq 2$. Soient ζ une racine primitive pième de 1 et $\mathbf{K}$ un corps de nombres contenant ζ que l'on considère plongé dans $\mathbf{C}$ par σ_{v_0}. On pose :*

$$\kappa = (2\pi)^{\frac{1-p}{2}}(\frac{p-1}{2})!(p-1)p^{\frac{p-2}{2}}.$$

Soient f une fonction entière telle que $f(\mathbf{Z}[\zeta]) \subset \mathbf{Z_K}$ et $(\alpha_v)_{v\in S_{\mathbf{K},\infty}}$ des nombres réels positifs satisfaisant les conditions :

(i) $\alpha_{v_0} \prod_{\substack{v\in S_{\mathbf{K},\infty} \\ v\neq v_0}} e^{\kappa\alpha_v} < \frac{1}{\kappa e}$,

(ii) $\limsup_{R\to+\infty} \frac{\log|f|_R}{R^{p-1}} \leq \alpha_{v_0}$,

(iii) *pour tout $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \{v_0\}$ et tout nombre réel r assez grand,*

$$\max_{\substack{u\in\mathbf{\Gamma} \\ \|u\|\leq r}} \log|\sigma_v(f(u))| \leq \alpha_v r^{p-1}.$$

Alors f est un polynôme.

D'autre part, le théorème 5.2 (voir le paragraphe 5) montre que le théorème 5.1 est à constante près optimal. Une version simplifiée du théorème 5.2 est le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.5. — *Soient $\mathbf{k}$ un corps de nombres de degré $n \geq 2$ sur $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{K}$ une extension finie de $\mathbf{k}$, non quadratique imaginaire, que l'on considère plongée dans $\mathbf{C}$ par σ_{v_0}. Soit $\mathbf{\Gamma}$ un ordre de $\mathbf{k}$. Alors, il existe une fonction entière non polynomiale f, une constante $C = C(\mathbf{k}, \mathbf{K}, \mathbf{\Gamma}) > \frac{\nu(\mathbf{\Gamma})}{ne}$ effectivement calculable et des nombres réels positifs $(\alpha_v)_{v\in S_{K,\infty}}$ satisfaisant :*

$$e^{\frac{n(2-n_{v_0})}{(n-1)n_{v_0}}} \alpha_{v_0} \prod_{\substack{v\in S_{\mathbf{K},\infty} \\ v\neq v_0}} e^{\frac{nn_v\alpha_v}{\nu(\mathbf{\Gamma})n_{v_0}}} \leq C$$

et tels que l'on ait les propriétés suivantes :

(i) $f(\mathbf{\Gamma}) \subset \mathbf{Z_K}$,

(ii) $\limsup_{R\to+\infty} \frac{\log|f|_R}{R^n} \leq \alpha_{v_0}$

(iii) *pour tout $v \in S_{\mathbf{K},\infty} \setminus \{v_0\}$ et tout nombre réel r assez grand,*

$$\max_{\substack{x\in\mathbf{\Gamma} \\ \|x\|\leq r}} \log|\sigma_v(f(x))| \leq \alpha_v r^n.$$

La preuve du théorème 5.1 relève d'une méthode de transcendance. On montre selon une idée de F.Gramain qu'une fonction satisfaisant les conditions du corollaire 1.1 vérifie des équations aux différences finies. Cela permet de montrer qu'elle est de croissance suffisamment lente pour conclure qu'elle