Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ESTIMÉES POUR LES VALUATIONS p-ADIQUES DES VALEURS PROPRES DES OPÉRATEURS DE HECKE

Vincent Lafforgue

Tome 139
Fascicule 4

2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 455-477

Bull. Soc. math. France
139 (4), 2011, p. 455–477

ESTIMÉES POUR LES VALUATIONS p-ADIQUES DES VALEURS PROPRES DES OPÉRATEURS DE HECKE

PAR VINCENT LAFFORGUE

RÉSUMÉ. — Pour les formes automorphes cuspidales sur les corps de fonctions et pour les formes automorphes cuspidales cohomologiques sur les corps de nombres, on donne des estimées pour les valuations p-adiques des valeurs propres des opérateurs de Hecke. Dans le cas des corps de nombres, ces estimées correspondent aux estimées de Katz-Mazur par les conjectures de Langlands.

ABSTRACT (*Estimates for p-adic valuations of Hecke operator eigenvalues*)
For cuspidal automorphic forms on function fields and for cohomological cuspidal automorphic forms on number fields we give estimates for the p-adic valuations of eigenvalues of Hecke operators. In the case of number fields, these estimates correspond to Katz-Mazur estimates by the Langlands conjectures.

Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{Q}$ et p un nombre premier tel que X ait bonne réduction en p. Dans [14], Deligne montre que le polynôme caractéristique de l'action du Frobenius géométrique en p sur la cohomologie ℓ-adique $H^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_l)$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$ et est indépendant du nombre premier auxiliaire $\ell \neq p$. De plus ses valeurs propres sont des entiers algébriques qui vérifient les estimées suivantes :

Texte reçu le 16 janvier 2009, accepté le 14 janvier 2010.

VINCENT LAFFORGUE, Laboratoire de Mathématiques, Analyse, Probabilités, Modélisation, Orléans (MAPMO), UMR CNRS 6628, Université d'Orléans, Rue de Chartres, B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2, et Institut de Mathématiques de Jussieu, Equipe d'Algèbres d'Opérateurs, Université Paris 7 Denis Diderot, Etage 7, bureau E04, 175, rue de Chevaleret, 75013 Paris • *E-mail :* `vlafforg@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F70, 11F85.

Mots clefs. — Formes automorphes, opérateurs de Hecke, corps p-adiques, motifs.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2011/455/$ 5.00

- pour tous les plongements de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, leurs images ont pour norme $p^{i/2}$ (conjectures de Weil, voir [14])
- pour tous les plongements de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ avec $\ell \neq p$, leurs images ont pour norme 1 (par construction).

Katz et Mazur ont donné dans [31, 32] des estimées pour les valuations des images dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ des valeurs propres du Frobenius géométrique. Elles affirment que le polygone de Newton p-adique du polynôme caractéristique du Frobenius géométrique est au-dessus du polygone convexe associé à la filtration de Hodge de la cohomologie de de Rham de X. Dans la proposition 4.3.3. de [18] (voir aussi la remarque 4.4.6 de [21], [12] et [25]) Fontaine montre que ces estimées sont encore vérifiées dans le cadre plus général d'un motif M sur un corps nombre F à coefficients dans un corps de nombres E, pour toute place finie v de F où M est non ramifié. Dans le paragraphe 4 nous rappelons cet argument, qui repose sur la faible admissibilité du φ-module filtré associé à la réalisation cristalline de M en la place v.

Le but de cet article est de montrer de telles estimées p-adiques pour les formes automorphes. Plus précisément soit π une forme automorphe cuspidale pour un groupe réductif déployé G sur un corps global F. Soit v une place finie de F où π est non ramifiée. Le paramètre de Satake de π en v est une classe de conjugaison $c_{\pi,v} \in \hat{G}(\mathbb{C})$ (en désignant par $\hat{G}$ le groupe dual de Langlands). On conjecture que $c_{\pi,v}$ est en fait une classe de conjugaison dans $\hat{G}(\overline{\mathbb{Q}})$ lorsque π est algébrique (voir [11] pour le cas de GL_r) et on le sait au moins dans les deux cas suivants

- i) F est un corps de fonctions,
- ii) F est un corps de nombres et π est cohomologique en les places infinies.

Soit $\mathfrak{p}$ une place dans $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus de la caractéristique de v. La valuation associée à $\mathfrak{p}$ induit une application $N_\mathfrak{p}$ de l'ensemble des classes de conjugaison dans $\hat{G}(\overline{\mathbb{Q}})$ dans la chambre de Weyl positive $P^+_\mathbb{R}$ qui dans le cas où $G = GL_r$ est le polygone de Newton $\mathfrak{p}$-adique du polynôme caractéristique. On possède dans $P^+_\mathbb{R}$ la relation d'ordre partiel suivante : $\mu \leq \lambda$ si μ est dans l'enveloppe convexe des $w(\lambda)$ pour w dans le groupe de Weyl ou de facon équivalente si $\lambda - \mu$ est une combinaison à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ des coracines positives de $\hat{G}$. Dans le cas où $G = GL_r$ on a $\mu \leq \lambda$ si et seulement si le polygone associé à μ est au-dessus du polygone associé à λ et a les mêmes extrémités.

On montre alors

- dans le cas i) : $N_\mathfrak{p}(c_{\pi,v}) \leq \rho$ (voir la proposition 2.1)
- dans le cas ii) : $N_\mathfrak{p}(c_{\pi,v}) \leq \rho + \mu$ où μ dépend de façon explicite de $\mathfrak{p}$ et des caractères infinitésimaux de π en les places infinies (voir la proposition 3.1).

La démonstration utilise les corollaires 1.2 et 1.4, qui résultent eux-mêmes d'une forme « entière » de l'isomorphisme de Satake figurant dans [23] et rappelée dans le premier paragraphe. Les mêmes idées apparaissent dans [34] et dans [13].

Dans le cas i) et pour $G = GL_r$, grâce à la correspondance de Langlands pour GL_r montrée par Laurent Lafforgue [28], ces estimées ont pour conséquence des estimées sur les valuations p-adiques des valeurs propres de Frobenius géométrique pour les représentations galoisiennes irréductibles. Nous montrons que ces estimées sont optimales. Elles complètent les estimées conjecturées par Deligne dans [15] et celles montrées par Laurent Lafforgue dans [28].

Dans le cas ii) ces estimées sont équivalentes, pour un motif correspondant à une forme automorphe cuspidale cohomologique pour GL_r, aux estimées de Katz-Mazur sous la forme générale montrée par Fontaine que nous avons évoquée ci-dessus. En fait dans le cas ii), ces estimées étaient déjà connues, ainsi que le fait qu'elles correspondent aux estimées de Katz-Mazur. D'abord la question est posée dans la conjecture 4.8 de [11] et l'idée d'utiliser la cohomologie entière est indiquée dans les phrases suivantes (voir aussi le corollaire 5.2 de [11] pour une méthode différente). Dans le cas d'un système local trivial ces estimées sont établies dans [12] ainsi que le fait qu'elles correspondent exactement aux estimées de Katz-Mazur. Le cas d'un système local arbitraire est laissé en exercice (exercice 3.11 de [12]) et traité essentiellement dans [24, 25, 30].

Pour simplifier nous ne considérons dans cet article que des groupes déployés. Le cas des groupes non déployés et des places ramifiées est un peu discuté dans le paragraphe 5, en relation avec les résultats de Jean-François Dat [13].

Je remercie beaucoup Laurent Clozel, Jean-François Dat et Alain Genestier pour des discussions qui ont permis d'améliorer cet article. Je remercie le rapporteur pour ses remarques. De plus cette introduction est largement inspirée par le résumé inclus dans le rapport.

1. Rappels sur l'isomorphisme de Satake

Les rappels qui suivent sont extraits de l'article de Gross [23]. On renvoie aussi à [9] pour l'isomorphisme de Satake. Soit K un corps local non archimédien et $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers. On note π une uniformisante de K, q le cardinal du corps résiduel et p sa caractéristique. Soit G un groupe réductif déployé sur $\mathcal{O}_K$. On fixe un tore maximal déployé et un Borel le contenant : $T \subset B \subset G$.

On note $X_*(T) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ et $X^*(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ les ensembles des copoids et des poids de G.

On note $\hat{G}$ le groupe dual de G (qui est un groupe réductif complexe) et $\hat{T}$ un tore maximal de $\hat{G}$ de sorte que $X^*(\hat{T}) = X_*(T)$ et $X_*(\hat{T}) = X^*(T)$. On note $\Phi^+ \subset X^*(T)$ l'ensemble des racines positives et $\hat{\Phi}^+ \subset X^*(\hat{T})$ l'ensemble des racines positives de $\hat{G}$ correspondant à Φ^+. On note W le groupe de Weyl de G, qui est aussi celui de $\hat{G}$. On note w_0 l'élément le plus long de W (qui envoie la chambre de Weyl sur son opposé).

L'ensemble des poids dominants de G, qui est aussi l'ensemble des copoids dominants de $\hat{G}$, est

$$P^+ = \{\nu \in X_*(\hat{T}), \langle \beta, \nu \rangle \geq 0 \text{ pour tout } \beta \in \hat{\Phi}^+\}.$$

On introduit aussi la chambre de Weyl positive

$$P^+_{\mathbb{R}} = \{\nu \in X_*(\hat{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \langle \beta, \nu \rangle \geq 0 \text{ pour tout } \beta \in \hat{\Phi}^+\}.$$

On a une identification $(X_*(\hat{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})/W = P^+_{\mathbb{R}}$ et pour $\lambda, \mu \in P^+_{\mathbb{R}}$, on écrit $\mu \leq \lambda$ si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

- μ appartient à l'enveloppe convexe des $w(\lambda)$ dans $X_*(\hat{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, pour $w \in W$,
- $\lambda - \mu$ est une combinaison à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ des coracines positives de $\hat{G}$.

L'ensemble des poids dominants de $\hat{G}$, qui est aussi l'ensemble des copoids dominants de G, est

$$\hat{P}^+ = \{\lambda \in X_*(T), \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Phi^+\}.$$

Pour $\lambda, \mu \in \hat{P}^+$ on écrit $\mu \leq \lambda$ si $\lambda - \mu$ est une somme de coracines positives de G.

Soit dg la mesure de Haar sur $G(K)$ telle que $G(\mathcal{O}_K)$ ait pour volume 1. On note $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke, formée des fonctions $G(\mathcal{O}_K)$-bi-invariantes à support compact sur $G(K)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, munie du produit de convolution $f.g(y) = \int_{G(K)} f(x)g(x^{-1}y)dx$. Pour tout cocaractère $\lambda \in X_*(T)$ l'image de $\lambda(\pi) \in T(K)$ dans $T(K)/T(\mathcal{O}_K)$ ne dépend pas du choix de π. De plus $G(K)$ est la réunion disjointe des doubles classes $G(\mathcal{O}_K)\lambda(\pi)G(\mathcal{O}_K)$ quand λ parcourt $\hat{P}^+$. Pour $\lambda \in \hat{P}^+$ on note $c_\lambda \in \mathcal{H}$ la fonction caractéristique de $G(\mathcal{O}_K)\lambda(\pi)G(\mathcal{O}_K)$, de sorte que $(c_\lambda)_{\lambda \in \hat{P}^+}$ forme une base de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{Z}$.

On note $R(\hat{G})$ l'anneau des représentations de $\hat{G}$, qui est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les représentations irréductibles de $\hat{G}$, et dont la multiplication est le produit tensoriel des représentations. Pour toute représentation V de $\hat{G}$, on note $[V]$ l'élément correspondant de $R(\hat{G})$.

L'isomorphisme de Satake est un isomorphisme de $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$-algèbres

$$\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \xrightarrow{\mathcal{S}} R(\hat{G}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$$

dont la définition est rappelée dans la proposition 3.6 de [23].

Le point essentiel pour nous est la proposition suivante, qui figure comme remarque dans [23] après la proposition 3.6.