Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LE THÉORÈME DE BERTINI EN FAMILLE

Olivier Benoist

Tome 139
Fascicule 4

2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 555-569

Bull. Soc. math. France
139 (4), 2011, p. 555–569

LE THÉORÈME DE BERTINI EN FAMILLE

PAR OLIVIER BENOIST

RÉSUMÉ. — On majore la dimension de l'ensemble des hypersurfaces de $\mathbb{P}^N$ dont l'intersection avec une variété projective intègre fixée n'est pas intègre. Les majorations obtenues sont optimales. Comme application, on construit, quand c'est possible, des hypersurfaces dont les intersections avec toutes les variétés d'une famille de variétés projectives intègres sont intègres. Le degré des hypersurfaces construites est explicite.

ABSTRACT (*Bertini's theorem in family*). — We give upper bounds for the dimension of the set of hypersurfaces of $\mathbb{P}^N$ whose intersection with a fixed integral projective variety is not integral. Our upper bounds are optimal. As an application, we construct, when possible, hypersurfaces whose intersections with all the varieties of a family of integral projective varieties are integral. The degree of the hypersurfaces we construct is explicit.

1.

On fixe K un corps de caractéristique quelconque, qui sera systématiquement sous-entendu. Par exemple, $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N_K$. Par sous-variété de $\mathbb{P}^N$, on entendra sous-schéma fermé géométriquement intègre de $\mathbb{P}^N$. On note $\mathscr{H}_e = \mathscr{H}_{e,N} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^N, \mathscr{O}(e)))$ l'espace des hypersurfaces de degré e de $\mathbb{P}^N$.

Texte reçu le 5 novembre 2009, accepté le 19 mai 2010.

OLIVIER BENOIST, DMA - École Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France • *E-mail :* `Olivier.Benoist@ens.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14N05, 14J70.

Mots clefs. — Géométrie projective, hypersurfaces, théorèmes de Bertini.

Si $X \subset \mathbb{P}^N$ est une sous-variété, on notera $\mathscr{F}_e^{\mathrm{int}}(X)$ (resp. $\mathscr{F}_e^{\mathrm{igr}}(X)$) le sous-ensemble de $\mathscr{H}_e$ constitué des hypersurfaces dont l'intersection avec X n'est pas géométriquement intègre de codimension 1 dans X (resp. n'est pas géométriquement irréductible et génériquement réduite de codimension 1 dans X). Le théorème de Bertini (voir par exemple [9] I 6.10) montre que si $\dim(X) \geq 2$, $\mathscr{F}_e^{\mathrm{int}}(X)$ est strictement inclus dans $\mathscr{H}_e$.

Pour les questions que nous allons étudier, la propriété « irréductible et génériquement réduit » se comporte mieux que l'intégrité. D'autre part, pour faire fonctionner des arguments de déformation, nous aurons besoin de savoir que ces mauvais lieux sont fermés. C'est pourquoi nous allons utiliser la variante suivante du théorème de Bertini, qui fait l'objet de la première partie de cet article.

Théorème 1.1. — *Soit X une sous-variété de $\mathbb{P}^N$ de dimension ≥ 2. Alors $\mathscr{F}_e^{\mathrm{int}}(X)$ et $\mathscr{F}_e^{\mathrm{igr}}(X)$ sont des fermés stricts de $\mathscr{H}_e$.*

Quand K est infini, une conséquence de ce théorème est qu'il existe des hypersurfaces dans le complémentaire de $\mathscr{F}_e^{\mathrm{int}}(X)$ (resp. $\mathscr{F}_e^{\mathrm{igr}}(X)$). On cherche dans cet article à obtenir une version « en famille » de ce théorème. On se pose plus précisément la question suivante :

Question 1.2. — *Étant donnée une famille de sous-variétés de dimension ≥ 2 de $\mathbb{P}^N$, peut-on trouver une hypersurface dont les intersections avec toutes les variétés de cette famille soient géométriquement intègres (resp. géométriquement irréductibles et génériquement réduites) ? Si la réponse est positive, peut-on trouver une telle hypersurface de petit degré ?*

En fait, cela revient à contrôler, pour chaque variété X de la famille, la codimension de $\mathscr{F}_e^{\mathrm{int}}(X)$ (resp. $\mathscr{F}_e^{\mathrm{igr}}(X)$) dans $\mathscr{H}_e$. Plus précisément, il faut répondre à la question suivante :

Question 1.3. — *La codimension de $\mathscr{F}_e^{\mathrm{int}}(X)$ (resp. $\mathscr{F}_e^{\mathrm{igr}}(X)$) dans $\mathscr{H}_e$ tend-elle vers l'infini avec e ?*

Dans la deuxième partie de cet article, on obtient des minorations optimales de $\mathrm{codim}_{\mathscr{H}_e}(\mathscr{F}_e^{\mathrm{igr}}(X))$ en fonction de e et de $\dim(X)$. En particulier, la réponse à la question 1.3 pour $\mathscr{F}_e^{\mathrm{igr}}(X)$ est positive. L'énoncé est le suivant :

Théorème 1.4. — *Soit X une sous-variété de $\mathbb{P}^N$ de dimension $n \geq 2$. Alors :*

$$\mathrm{codim}_{\mathscr{H}_e}(\mathscr{F}_e^{\mathrm{igr}}(X)) \geq \begin{cases} n-1 & si \quad e=1 \\ \binom{e+n-1}{e} - n & si \quad e \geq 2. \end{cases}$$

De plus, ces bornes sont optimales. Elles sont atteintes pour un cône sur une courbe quand $e=1$ et pour un espace linéaire quand $e \geq 2$.

On en déduit dans la troisième partie des minorations analogues pour $\mathcal{F}_e^{\mathrm{int}}(X)$. L'énoncé qui suit montre que la réponse à la question 1.3 pour $\mathcal{F}_e^{\mathrm{int}}(X)$ est positive si et seulement si X n'a pas de point fermé de profondeur 1.

Théorème 1.5. — *Soit X une sous-variété de $\mathbb{P}^N$ de dimension $n \geq 2$. Alors :*

(i) *Si X n'a pas de point de profondeur 1 et de codimension > 1,*

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}_e^{\mathrm{int}}(X)) \geq \begin{cases} n-1 & \text{si} \quad e = 1 \\ \binom{e+n-1}{e} - n & \text{si} \quad e \geq 2. \end{cases}$$

(ii) *Si X n'a pas de point fermé de profondeur 1,*

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}_e^{\mathrm{int}}(X)) \geq \begin{cases} e+1 & \text{si} \quad n \geq 3 \\ e-1 & \text{si} \quad n = 2 \text{ et } e \geq 2 \\ 1 & \text{si} \quad n = 2 \text{ et } e = 1. \end{cases}$$

(iii) *Si X possède un point fermé de profondeur 1,*

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{H}_e}(\mathcal{F}_e^{\mathrm{int}}(X)) = 1 \text{ pour tout } e.$$

De plus, ces bornes sont optimales.

Remarquons que la condition « ne pas posséder de point fermé de profondeur 1 et de codimension > 1 » est la condition $S2$ de Serre. Elle est en particulier vérifiée pour les variétés normales et les variétés de Cohen-Macaulay.

Enfin, dans une quatrième partie, on obtient le théorème suivant répondant à la question 1.2. La restriction sur les fibres de la famille, dans le cas intègre, est nécessaire au vu du théorème précédent.

Théorème 1.6. — *Soit une famille plate de sous-variétés de dimension $n \geq 2$ de $\mathbb{P}^N$, c'est-à-dire un diagramme commutatif de K-schémas de type fini :*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}^N \times V \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ V & \end{tikzcd}$$

où π est plat à fibres géométriquement intègres de dimension $n \geq 2$ et i est une immersion fermée. Alors :

(i) *Soit e tel que $\binom{e+n-1}{e} - n - 1 \geq \dim(V)$. L'ensemble des hypersurface H de $\mathbb{P}^N$ de degré $\dim(V) + 2$ telles que pour tout $v \in V$, $\mathfrak{X}_v \cap H$ est géométriquement irréductible et génériquement réduit de codimension 1 dans $\mathfrak{X}_v$ contient un ouvert non vide.*

(ii) *Soit* $e \geq \dim(V) + 2$. *Supposons que les* $\mathfrak{X}_v$ *n'ont pas de points fermés de profondeur* 1. *Alors l'ensemble des hypersurfaces* H *de* $\mathbb{P}^N$ *de degré* e *telles que pour tout* $v \in V$, $\mathfrak{X}_v \cap H$ *est géométriquement intègre de codimension* 1 *dans* $\mathfrak{X}_v$ *contient un ouvert non vide.*

Si V *est propre, ces ensembles sont des ouverts non vides. Enfin, quand le corps* K *est infini, on peut trouver une telle hypersurface* H *définie sur* K.

Ces questions ont été motivées par les constructions de [1] de variétés dont le fibré cotangent est ample. En particulier, le théorème 1.5 corrige et précise Lemma 12 de *loc. cit.*, erroné.

Quand K est fini, les méthodes utilisées ici pour prouver le théorème 1.6 ne permettent pas de construire une hypersurface définie sur K. L'analogue de cette question pour la version lisse du théorème de Bertini a été étudiée et résolue par Poonen dans [10].

Je tiens à remercier chaleureusement Olivier Debarre pour ses nombreux conseils et Olivier Wittenberg pour sa relecture attentive de versions préliminaires de ce texte.

2. Théorème de Bertini

On va démontrer dans cette partie le théorème 1.1.

2.1. Ouverture de la propriété « irréductible et génériquement réduit » . — Pour cela, on va commencer par déterminer des conditions sur une famille de schémas sous lesquelles l'ensemble des fibres qui sont irréductibles et génériquement réduites est ouvert : c'est le rôle de la proposition 2.1. C'est une proposition très proche d'énoncés de [6], et les démonstrations sont calquées sur celles s'y trouvant. Par conséquent, on multipliera les références à cet ouvrage.

Proposition 2.1. — *Soit* $f : X \to S$ *un morphisme de schémas propre, plat et de présentation finie. On suppose que les composantes irréductibles des fibres de* f *sont toutes de la même dimension* n. *Alors l'ensemble* E *des* $s \in S$ *tels que* X_s *est géométriquement irréductible et génériquement réduit est ouvert dans* S.

Preuve. — On scinde la preuve en plusieurs étapes.

Étape 1. Sous les hypothèses de l'énoncé, si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète de point générique s' et de point fermé s, si de plus les composantes irréductibles de $X_{s'}$ sont géométriquement irréductibles, alors si $s \in E$, on a également $s' \in E$.

Montrons d'abord que $X_{s'}$ est géométriquement génériquement réduit. Par [6] 12.1.1 (vii), l'ensemble U des $x \in X$ tels que $X_{f(x)}$ est géométriquement