Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COMPORTEMENT HARMONIQUE DES DENSITÉS CONFORMES ET FRONTIÈRE DE MARTIN

Thomas Roblin

Tome 139
Fascicule 1

2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 97-127

Bull. Soc. math. France
139 (1), 2011, p. 97–127

COMPORTEMENT HARMONIQUE DES DENSITÉS CONFORMES ET FRONTIÈRE DE MARTIN

PAR THOMAS ROBLIN

RÉSUMÉ. — Traitant la série de Poincaré d'un groupe discret d'isométries en courbure négative comme un noyau de Green, on établit une théorie du potentiel assez comparable à la théorie classique pour affirmer un parallèle entre densités conformes à la Patterson-Sullivan et densités harmoniques, et notamment définir une frontière de Martin où les densités ergodiques forment la partie minimale, et enfin l'identifier géométriquement sous hypothèse d'hyperbolicité.

ABSTRACT (*Harmonic behaviour of conformal densities and Martin boundary*)
By treating the Poincaré series of a discrete group of isometries in negative curvature like a Green kernel, we set up a potential theory enough comparable to the classical theory, which allows us to draw a parallel between conformal densities and harmonic densities, and in particular to define a Martin boundary in which ergodic densities make up the minimal part, and even to give a geometrical identification of it under a hyperbolicity assumption.

Texte reçu le 30 avril 2009, révisé les 20 octobre 2009 et 15 décembre 2009, accepté le 12 octobre 2010

THOMAS ROBLIN, CNRS UMR 7599, Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, Université Pierre et Marie Curie–Boîte courrier 188, 75252–Paris Cedex 05, France •
E-mail : `thomas.roblin@upmc.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 37F35, 20F65, 20F67, 22E40, 31C35, 31E99.

Mots clefs. — Mesures de Patterson-Sullivan, groupes discrets, courbure négative, théorie du potentiel, frontière de Martin, groupes hyperboliques.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2011/97/$ 5.00

1. Introduction

Le présent article prolonge l'idée de départ de [20], en développant dans une autre voie les conséquences de ce qu'on y avait appelé le principe des ombres. Là il s'agissait d'appliquer ce principe à la théorie ergodique des revêtements galoisiens nilpotents des variétés convexe-cocompactes ; ici, l'on poursuit davantage le parallèle amorcé entre densités conformes à la Patterson-Sullivan et densités harmoniques.

Les densités conformes ou de Patterson-Sullivan, qui prennent leur origine dans [17] et [21], ont permis d'étendre largement la théorie ergodique des groupes d'isométries discrets sur les espaces à courbure strictement négative, en se substituant à la densité de Lebesgue utilisée dans le cadre classique des groupes de revêtements des surfaces compactes à courbure constante. Cette dernière coïncide par ailleurs avec la densité harmonique liée au laplacien (hyperbolique), et de ce fait appelle aux concepts et aux techniques de la théorie du potentiel, qui sont au cœur de [22], [14], [2] entre autres. Mais si dans un cadre un peu plus large, les densités harmoniques attachées au laplacien restent présentes, elles s'avèrent néanmoins généralement distinctes des densités conformes (voir [13]). Aussi la question se pose-t-elle de savoir si les densités conformes peuvent apparaître comme harmoniques pour un autre opérateur (loin d'être régulier en général), disons plutôt pour une autre théorie du potentiel. Par exemple, dans [9], pour certains groupes (groupes de type divergent), et pour la densité (alors unique) de dimension égale à l'exposant critique, ce programme a été réalisé dans une version discrète en produisant une marche aléatoire sur le groupe pour laquelle la mesure de Patterson-Sullivan est harmonique ; cette construction permet l'identification du bord de Poisson, mais reste décevante à d'autres égards : perte de symétrie, absence de moment exponentiel comme on en trouve dans la discrétisation du laplacien classique (cf [4]).

Dans cet article, nous apportons une réponse différente : nous sommes capables de rebâtir une bonne part de l'ossature de la théorie du potentiel pour les densités conformes, et ce dans une grande généralité, sans pour autant parvenir à lui donner pour fondement un opérateur ou noyau résolvant précis. Aussi nous tiendrons-nous plutôt dans une analogie entre densités conformes et harmoniques, qui fera notamment apparaître la série de Poincaré du groupe comme fonction de Green. Des propriétés essentielles seront mises en lumière : théorème de Fatou, réduite (balayage), principe du maximum, équation résolvante, mesure harmonique des boules, mais le tout dilaté par des constantes comme si l'on avait effectué une discrétisation grossière. En particulier, nous introduirons une frontière de Martin pour les densités conformes, intéressante d'ailleurs en regard de la construction initiale de Patterson dans [17], et qui sera identifiée géométriquement dans certains cas. Quant aux groupes compris dans cette étude, nous n'exigeons d'eux qu'une certaine uniformité que traduit le principe des ombres ci-dessous ; sont par exemple concernés tous les sous-groupes distingués des groupes convexe-cocompacts.

Au terme de ce travail, nous reviendrons sur le problème laissé ouvert, mais considérablement précisé, de trouver une théorie du potentiel vraiment exacte pour les densités conformes.

Signalons, avant de commencer l'exposition, que nous nous sommes ici tenus aux densités conformes sur des espaces CAT(-1) par souci de simplicité, mais que ce cadre axiomatique aurait encore pu être étendu (mesures de Gibbs, mesures quasi-conformes).

Nous tenons enfin à remercier le rapporteur anonyme pour sa lecture attentive du manuscrit.

2. Préliminaires

2.1. Géométrie. — Nous considérerons un espace métrique CAT(-1) propre X. Nous renvoyons par exemple à [6], [11], [3] et à [19] pour les définitions et les premières propriétés de cette catégorie d'espaces généraux, dont il suffira au lecteur de savoir qu'elle comprend les variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbures sectionnelles ≤ -1, et également les arbres et les immeubles hyperboliques. Nous noterons ∂X le bord visuel de X, et $\overline{X} = X \cup \partial X$. Pour $x, y \in X$, nous désignerons par $d(x, y)$ la distance de x à y.

Nous examinerons un groupe discret Γ d'isométries de X fixé, dont l'ensemble limite sera noté $\Lambda(\Gamma)$. Nous supposerons que Γ n'est pas élémentaire, c'est-à-dire qu'il ne laisse invariant aucun sous-ensemble fini de $\overline{X}$ ($\Lambda(\Gamma)$ est alors le plus petit fermé invariant par Γ, et est infini). Nous noterons X_Γ l'*enveloppe géodésique* de l'ensemble limite, c'est-à-dire la réunion dans X des géodésiques dont les extrémités sont dans $\Lambda(\Gamma)$. Alors $\overline{X_\Gamma}$ est un fermé de $\overline{X}$ invariant par Γ, qui représentera ici une approximation convenable de l'enveloppe convexe de $\Lambda(\Gamma)$ (grâce à des arguments de géométrie hyperbolique). C'est en fait le théâtre de l'essentiel de l'action de Γ, et l'on s'y restreindra systématiquement. Si Γ agit de façon cocompacte sur X_Γ, on dit que Γ est *convexe-cocompact* ; comme ces groupes n'offriront aucun intérêt dans une étude portant sur certaines compactifications du quotient X_Γ/Γ, passé quelques généralités, ils seront tout bonnement *exclus* à partir du paragraphe 3, pour plus de commodité.

Pour $(\xi, x, y) \in X^3$, nous noterons $\beta_\xi(x, y) = d(x, \xi) - d(y, \xi)$. Il est bien connu que cette fonction de trois variables s'étend par continuité sur $\overline{X} \times X^2$. Restreinte à $\partial X \times X^2$, elle est connue sous le nom de *fonction de Busemann*. Mais nous aurons profit à considérer le cocycle de Busemann $\beta_\xi(x, y)$ défini pour

ξ dans $\overline{X}$ tout entier comme ci-dessus. Notons l'inégalité (d'origine triangulaire) $|\beta_\xi(x,y)| \leq d(x,y)$. Une *horosphère* dans X est une « ligne de niveau » d'une fonction de Busemann $\beta_\xi(x,.)$. Plus précisément, l'horosphère basée en $\xi \in \partial X$ et passant par $x \in X$ est l'ensemble des $y \in X$ tels que $\beta_\xi(x,y) = 0$.

2.2. Densités conformes invariantes. — On appellera *densité* une application μ qui à chaque $x \in X$ associe une mesure μ_x positive finie sur $\overline{X}$ (ordinairement sur ∂X, mais nous aurons avantage à considérer ici $\overline{X}$ tout entier). Une densité μ sera dite *conforme de dimension* $\delta \geq 0$ si pour tous x et x' dans X, la mesure $\mu_{x'}$ est absolument continue par rapport à μ_x, avec une dérivée de Radon-Nikodym donnée par la formule :

$$\frac{\mathrm{d}\mu_{x'}}{\mathrm{d}\mu_x}(\xi) = e^{-\delta\beta_\xi(x',x)}. \tag{1}$$

Une densité μ sera dite *invariante par* Γ si pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $x \in X$, on a [(1)] :

$$\gamma_*\mu_x = \mu_{\gamma x}. \tag{2}$$

Remarquons que le support fermé d'une densité μ conforme et invariante par Γ (c'est-à-dire le support commun aux μ_x) contient nécessairement $\Lambda(\Gamma)$. Nous désignerons désormais par $\mathscr{C}(\Gamma,\delta)$ (resp. $\mathscr{C}_\infty(\Gamma,\delta)$) l'ensemble des densités conformes de dimension δ, invariantes par Γ, normalisées par $\|\mu_o\| = 1$ où o est un point dorénavant fixé dans X_Γ, et enfin portées par $\overline{X_\Gamma}$ (resp. $\Lambda(\Gamma)$).

L'*exposant critique* $\delta(\Gamma)$ *de* Γ est par définition l'exposant critique de la série de type Dirichlet-Poincaré $G^\delta(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\delta d(x,\gamma y)}$ ($\delta \in \mathbb{R}$, le pourquoi de la notation G apparaîtra plus loin), ou encore $\delta(\Gamma) = \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log \sharp\{\, \gamma \in \Gamma \mid d(x,\gamma y) \leq t \,\}$ (l'exposant ne dépend point du choix de x et y dans X). En réalité, la limite supérieure précédente est une véritable limite (cf [18]). Nous ferons désormais l'hypothèse que $\delta(\Gamma)$ *est fini*, hypothèse que l'étendue de notre cadre géométrique nous contraint de stipuler, mais qui est d'emblée acquise notamment lorsque X est une variété à courbure pincée, ou encore lorsque X admet un groupe d'isométries discret cocompact.

Patterson a montré que $\mathscr{C}_\infty(\Gamma,\delta(\Gamma))$ n'est pas vide, grâce à une célèbre construction (cf [17]). Notons au passage que cela fait voir que $\delta(\Gamma) > 0$ (puisqu'il n'existe pas de mesure finie invariante par Γ). Sullivan a ensuite établi que $\mathscr{C}_\infty(\Gamma,\delta)$ est vide lorsque $\delta < \delta(\Gamma)$ (cf [21], [19]).

Quant aux densités dans $\mathscr{C}(\Gamma,\delta)$ portées par X_Γ, il est clair qu'il en existe si et seulement si $G^\delta(x,y) < \infty$ (ce qui ne dépend pas du choix de x et y que nous omettrons dorénavant dans cette condition), auquel cas ce sont les densités $\mathscr{G}^{\delta,y} = G(o,y)^{-1}\tilde{\mathscr{G}}^{\delta,y}$ ($y \in X_\Gamma$) et toutes leurs combinaisons selon des

(1) La mesure $\gamma_*\mu_x$ est définie par $\gamma_*\mu_x(B) = \mu_x(\gamma^{-1}B)$ pour tout borélien B