Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

INDUCTION AUTOMORPHE GLOBALE POUR LES CORPS DE NOMBRES

Guy Henniart

Tome 140
Fascicule 1

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-17

Bull. Soc. math. France
140 (1), 2012, p. 1–17

INDUCTION AUTOMORPHE GLOBALE POUR LES CORPS DE NOMBRES

PAR GUY HENNIART

RÉSUMÉ. — Soit F un corps de nombres et soit E une extension cyclique de F, de degré d. L'induction automorphe associe à une représentation automorphe cuspidale τ de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale. La représentation π est caractérisée par le fait qu'à presque toute place v de F, le facteur $L(\pi_v, s)$ est le produit des facteurs $L(\tau_w, s)$, w parcourant les places de E au–dessus de v. Par la correspondance conjecturale de Langlands, cette opération doit correspondre à l'induction, de E à F, des représentations galoisiennes.

Nous prouvons l'existence de l'induite automorphe π de τ, et étudions les fibres et l'image de ce processus d'induction. Pour cela nous utilisons et étendons les résultats d'Arthur et Clozel sur le processus de changement de base, qui correspond à la restriction de E à F des représentations galoisiennes, et nous précisons le lien entre ces deux processus. De plus, nous prouvons que l'opération d'induction automorphe globale est compatible aux places finies à l'opération locale construite par R. Herb et l'auteur.

ABSTRACT (*Global automorphic induction for number fields*). — Let F be a number field, E a finite cyclic extension of F, d its degree. Automorphic induction associates to a cuspidal automorphic representation τ of $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ an automorphic representation π of $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induced from cuspidal, and characterized by the fact that at almost all places v of F, the factor $L(\pi_v, s)$ is the product of the factors $L(\tau_w, s)$, where w runs through the places of E above v. By the correspondence conjectured by Langlands, that process should correspond to inducing Galois representations from E to F.

We prove here that the representation π automorphically induced from τ exists, and we study the fibres and the image of automorphic induction. For that we use

Texte reçu le 12 janvier 2009, révisé et accepté le 13 mars 2009.

GUY HENNIART, Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Orsay Cedex 91405 France • *E-mail :* Guy.Henniart@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E55, 22E50.

Mots clefs. — Représentations automorphes, conjectures de Langlands, changement de base, induction automorphe.

and extend the results of Arthur and Clozel on base change, which corresponds to restricting Galois representations from F to E, and we clarify the relations between the two processes. Moreover we prove that global automorphic induction is compatible, at finite places, with the local automorphic induction defined by R. Herb and the author.

1. Introduction

1.1. — Soient F un corps de nombres, E une extension cyclique de F, d le degré de E sur F. Arthur et Clozel [1] ont établi un processus de changement de base, de F à E, qui à une représentation automorphe cuspidale unitaire π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ associe une représentation automorphe $\pi_{E/F}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$, induite de cuspidale unitaire, de sorte qu'en presque toute place w de E, le facteur L de $\pi_{E/F}$ en w soit le produit des facteurs $L(\chi\pi_v,\ s)$, où v est la place de F au–dessous de w et où χ parcourt les caractères de $F_v^\times$ triviaux sur les normes de $E_w^\times$.

Dans ([1], chap. III), Arthur et Clozel déterminent l'image et les fibres du changement de base, au moins quand le degré d est un nombre premier.

Nous voulons étudier ici le processus en sens inverse, dit d'induction automorphe, qui à une représentation automorphe cuspidale unitaire τ de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ associe une représentation automorphe $\pi = \tau^{E/F}$ de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, de sorte que pour presque toute place v de F le facteur $L(\pi_v, s)$ soit le produit des facteurs $L(\tau_w, s)$, w parcourant les places de E au–dessus de v.

1.2. — L'existence de ces deux processus se prévoit facilement par l'heuristique de Langlands, dans laquelle les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ correspondent à des représentations galoisiennes de dimension n. Pour être plus précis, les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ qui sont algébriques aux places infinies au sens de Clozel [2] doivent correspondre à des représentations ℓ–adiques de dimension n du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ – où $\overline{F}$ est une clôture algébrique de F –, les représentations automorphes cuspidales correspondant à des représentations irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Si E est une extension finie quelconque de F dans $\overline{F}$, et d son degré, alors $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ est un sous–groupe ouvert d'indice d de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. La restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ d'une représentation ℓ–adique de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ donne une représentation ℓ–adique de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$, tandis que l'induction à $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ d'une représentation ℓ–adique de dimension m de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ donne une représentation ℓ–adique de dimension md de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$.

Le processus de changement de base pour les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est le pendant du processus de restriction des représentations ℓ–adique de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$: la condition sur les facteurs L reflète précisément le comportement de la restriction aux places non ramifiées. De même le processus d'induction automorphe est le pendant du processus d'induction des représentations galoisiennes, d'où son nom ; la condition sur les facteurs L reflète également le comportement de l'induction galoisienne aux places non ramifiées.

1.3. — Il faut noter que le changement de base n'est pas établi pour toutes les extensions finies E de F : le cas connu où E/F est cyclique permet de traiter celui où E est une extension galoisienne de F à groupe de Galois résoluble ([1], chap. III), mais le cas général est pour l'heure hors d'atteinte. De même, l'induction automorphe ne peut être établie pour l'instant que dans des situations d'inductions cycliques successives.

1.4. — Pour E/F cyclique le changement de base est obtenu par comparaison de deux formules des traces, l'une pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, l'autre pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ mais « tordue » par l'action d'un générateur σ de $\mathrm{Gal}(E/F)$. L'induction automorphe, toujours pour E/F cyclique, doit s'obtenir également par comparaison de deux formules des traces, l'une pour $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$, l'autre pour $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}/F)$, mais « tordue » par l'action d'un caractère de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ qui définisse l'extension E/F. C'est d'ailleurs par la comparaison de telles formules des traces que les théories locales du changement de base ([1, chap. I]) et de l'induction automorphe [5], ont été construites. Cependant les formules des traces de [5] sont utilisées dans des cas particuliers où elles ont une écriture et une démonstration relativement simples. Ce n'est pas le cas des formules établies dans ([1], chap. II) pour le changement de base. Nous avons reculé pour l'instant devant la tâche d'utiliser les travaux ultérieurs d'Arthur : l'induction automorphe peut s'interpréter en termes d'endoscopie.

1.5. — Plus simplement, nous déduisons ici la construction et les propriétés de l'induction automorphe cyclique, de celles du changement de base. Du point de vue de l'heuristique de Langlands, nous utilisons un procédé de « descente galoisienne ». Plus précisément, si ρ est une représentation ℓ–adique de dimension m de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$, son induite σ à $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, qui est de dimension md, est stable par torsion par les caractères de $\mathrm{Gal}(E/F)$, et la restriction de σ à $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ est la somme des conjugués de ρ par le groupe cyclique $\mathrm{Gal}(E/F)$. De plus on voit facilement que ces deux propriétés caractérisent σ.

Si τ est une représentation automorphe cuspidale (unitaire) de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$, on va donc tenter de définir son induite automorphe $\pi = \tau^{E/F}$ comme la représentation automorphe de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, qui est stable par torsion par les caractères de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ définissant E/F et dont le changement de base à $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_E)$ est l'induite parabolique de $\otimes_g \tau^g$, g parcourant $\mathrm{Gal}(E/F)$.

1.6. — Pour démontrer l'existence et l'unicité de $\pi = \tau^{E/F}$, et obtenir les propriétés du processus ainsi obtenu, il nous faut connaître complètement les fibres et l'image du changement de base. On sait que les résultats de ([1], chap. III) dans le cas où d est premier ne permettent pas d'atteindre le cas général par descentes galoisiennes successives de degré premier [10], du moins sans travail supplémentaire. C'est pourquoi dans un premier temps, nous reprenons les arguments de ([1], chap. III) pour les compléter en traitant le cas d'une extension cyclique E/F de degré quelconque. Puis nous en déduisons le cas de l'induction automorphe.

Nous énonçons maintenant nos résultats. On fixe une extension cyclique E/F, de degré d, un générateur σ du groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$ et un générateur κ du groupe X des caractères de $\mathbb{A}_F^\times$ triviaux sur $F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$.

1.7. — Commençons par le changement de base. Si π est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, on dit qu'une représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$, induite de cuspidale unitaire, est un changement de base de π (de F à E) si les conditions sur les facteurs L de (1.1) sont vérifiées. Par le théorème de rigidité de Jacquet et Shalika ([7], Theorem 4.4), Π est alors unique à isomorphisme près, et on parlera donc du changement de base Π de π, qu'on pourra noter $\pi_{E/F}$. Par les conditions de (1.1), on voit que Π est stable par l'action de Γ.

On a la compatibilité évidente à l'induction parabolique. Si $n_1, \dots, n_r$ sont des entiers ≥ 1 de somme n, et que pour $i = 1, \dots, r$, π_i est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, on note $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ la représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ obtenue par induction parabolique de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$. Si pour $i = 1, \dots, r$, Π_i est un changement de base de π_i, alors $\Pi_1 \times \cdots \Pi_r$ est un changement de base de $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$.

1.8. — Si π est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, on note $X(\pi)$ son stabilisateur dans X, $d(\pi)$ le cardinal de $X(\pi)$. Bien sûr $d(\pi)$ divise d, mais en regardant les caractères centraux on voit que $d(\pi)$ divise aussi n.

Théorème 1. — *Soit π une représentation automorphe cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, et posons $\delta = d(\pi)$, $n = \delta r$. Alors π possède un changement de base Π, qui est de la forme $\Pi_1 \times \Pi_1^\sigma \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{\delta-1}}$, où Π_1 est une représentation automorphe cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_E)$, dont le stabilisateur dans Γ est engendré par σ^δ. Les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induites de*