Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

REMPLISSAGE DE L'ESPACE EUCLIDIEN PAR DES COMPLEXES POLYÉDRIQUES D'ORIENTATION IMPOSÉE ET DE ROTONDITÉ UNIFORME

Vincent Feuvrier

Tome 140
Fascicule 2

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 163-235

Bull. Soc. math. France
140 (2), 2012, p. 163–235

REMPLISSAGE DE L'ESPACE EUCLIDIEN PAR DES COMPLEXES POLYÉDRIQUES D'ORIENTATION IMPOSÉE ET DE ROTONDITÉ UNIFORME

par Vincent Feuvrier

Résumé. — Nous donnons une méthode de construction de complexes polyédriques dans $\mathbb{R}^n$ permettant de relier entre elles des grilles dyadiques d'orientations différentes tout en s'assurant que les polyèdres utilisés ne soient pas trop plats, y compris leurs sous-faces de toutes dimensions. Pour cela, après avoir rappelé quelques définitions et propriétés simples des polyèdres euclidiens compacts et des complexes, on se dote d'un outil qui permet de remplir de polyèdres n-dimensionnels un ouvert en forme de tube dont la frontière est portée par un complexe $n-1$-dimensionnel. Le théorème principal est démontré par induction sur n en reliant les complexes dyadiques couche par couche, en remplissant des tubes disposés autour des différentes couches et en utilisant le théorème en dimension inférieure pour construire les morceaux manquants de la frontière des tubes. Une application possible de ce résultat est la recherche de solutions à des problèmes de minimisation de la mesure en dimension et codimension quelconques dans certaines classes topologiques.

Abstract (*Filling Euclidean space using polyhedric complexes of imposed orientation with uniform rotondity*)

We build polyhedral complexes in $\mathbb{R}^n$ that coincide with dyadic grids with different orientations, while keeping uniform lower bounds (depending only on n) on the flatness of the added polyhedrons including their subfaces in all dimensions. After the definitions and first properties of compact Euclidean polyhedrons and complexes, we introduce a tool allowing us to fill with n-dimensionnal polyhedrons a tubular-shaped open set, the boundary of which is a given $n-1$-dimensionnal complex. The main result is proven inductively over n by completing our dyadic grids layer after layer,

Texte reçu le 20 décembre 2008, accepté le 14 décembre 2009.

Vincent Feuvrier, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `vincent.feuvrier@normalesup.org` • *Url :* `http://www.math.u-psud.fr/~feuvrier`

Mots clefs. — Polyèdres euclidiens, complexes polyédriques, pavages polyédriques.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2012/163/$ 5.00

filling the tube surrounding each layer and using the result in the previous dimension to build the missing parts of the tube boundary. A possible application of this result is a way to find solutions to problems of measure minimization over certain topological classes of sets, in arbitrary dimension and codimension.

1. Introduction

Le résultat principal de ce papier (le théorème 1, dit « de fusion ») peut s'énoncer simplement :

> « Étant donnés deux complexes dyadiques S_1 et S_2 tels qu'un morceau de la frontière de S_1 forme la frontière d'un ouvert borné O disjoint de S_1 qui contient S_2, si la distance séparant S_1 et S_2 est suffisamment grande devant la taille des cubes dyadiques considérés alors on peut construire un complexe S_3 tel que $S_2 \cup S_3$ remplisse $\overline{O}$, avec une borne inférieure uniforme sur la rotondité des polyèdres construits et leurs sous-faces. »

Le lecteur qui se risquerait à effectuer un dessin en dimension 2 n'aurait probablement aucun mal à compléter deux complexes dyadiques d'orientations différentes en s'imposant une borne inférieure raisonnable sur les angles des segments qui s'intersectent. Il obtiendrait d'ailleurs vraisemblablement des bornes inférieures sur la rotondité et la distance entre les deux complexes meilleures que celles du théorème 1. Bien évidemment les choses se compliquent en dimension plus grande, en particulier faute d'outils descriptifs « morphologiques » efficaces. En outre des problèmes supplémentaires surviennent lorsque $n \geq 4$, rendant les représentations beaucoup plus difficiles.

Nous donnons d'abord une définition simple et intuitive (définition 1) des polyèdres euclidiens convexes de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'intersection compacte de demi-espaces affines, équivalente à celle des polytopes (propriété 1) et amenant naturellement la définition des faces et des sous-faces (définition 2). On pourra lire à ce sujet l'article d'Andrée Bastiani [1] pour des définitions plus générales dans des espaces topologiques. Nous introduisons une quantité (la rotondité, définition 4) permettant de contrôler la forme d'un polyèdre donné en considérant le rapport compris entre 0 et 1 des rayons d'une boule inscrite et d'une boule circonscrite ; plus ce rapport est proche de zéro, plus le polyèdre est aplati. Enfin pour formaliser l'idée intuitive de familles de polyèdres de même dimension qui se raccordent bien entre eux nous définissons la notion de complexe (définition 5), en imposant que les polyèdres et leurs sous-faces de dimensions inférieures soient d'intérieurs disjoints deux à deux (hormis ceux qui sont confondus) ; c'est le cas par exemple des complexes dyadiques, abordés dans la

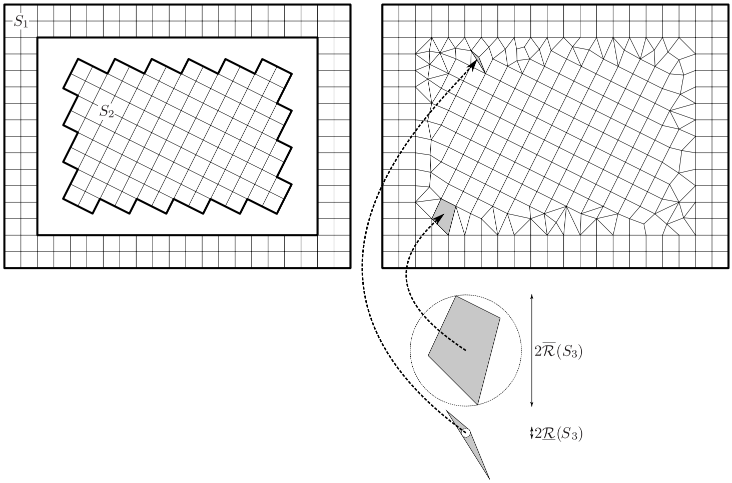

FIGURE 1. Fusion à la main de deux complexes bidimensionnels et les constantes de forme obtenues

section 3. La notion de rotondité est généralisée aux complexes en considérant la rotondité minimale parmi les polyèdres et les sous-faces, de façon à pouvoir minorer la rotondité de la sous-face la plus aplatie.

Avant d'énoncer le plan de l'article donnons rapidement et sans démonstration une application possible de ce résultat inspirée de Reifenberg [7] pour trouver des ensembles de mesure minimale parmi certaines classes topologiques. Par exemple, trouver parmi une classe $\mathfrak{F}$ stable par des déformations lipschitziennes un ensemble $E \in \mathfrak{F}$ tel que

$$\mathscr{H}^d(E) = \inf_{F \in \mathfrak{F}} \mathscr{H}^d(F), \tag{1}$$

la mesure utilisée ici étant la mesure de Hausdorff d-dimensionnelle $\mathscr{H}^d$ avec $0 \leq d < n$ (on pourra trouver plus de détails dans le livre de Mattila [6]). Notons que la technique utilisée reste valable pour la minimisation de fonctionnelles ensemblistes plus générales.

Considérons un polyèdre n-dimensionnel δ (convexe par définition, de rotondité $R(\delta)$) et $c \in \overset{\circ}{\delta}$. Notons $\Pi_{\delta,c}$ la projection radiale sur $\partial\delta$ qui à $x \in \delta \setminus \{c\}$ associe l'unique intersection de la demi-droite $[c, x)$ avec $\partial\delta$. Posons $d = n - 1$ et soit $E \subset \delta$ une sous-partie fermée $\mathscr{H}^d$-mesurable telle que $\mathscr{H}^d(E) < \infty$. En calculant la valeur moyenne de $\mathscr{H}^d(\Pi_{\delta,c}(E))$ lorsque c parcourt $\overset{\circ}{\delta} \setminus E$ on peut montrer en utilisant Fubini qu'il existe une constante $K > 0$ ne dépendant que de d et n telle que

$$\exists c \in \mathring{\delta} : \mathcal{H}^d(\Pi_{\delta,c}(E)) \leq KR(\delta)^{-2d}\mathcal{H}^d(E). \tag{2}$$

En utilisant par exemple le théorème d'extension lipschitzienne de Kirzbraun [4] on peut montrer que pour tout complexe S de rotondité $\mathcal{R}(S)$ et toute sous-partie fermée E telle que $E \subset \mathcal{U}(S)$ on peut trouver une application lipschitzienne ϕ telle que $\phi(E)$ est inclus dans les faces de S et

$$\mathcal{H}^d(\phi(E)) \leq K\mathcal{R}(S)^{-2d}\mathcal{H}^d(E). \tag{3}$$

En continuant les projections radiales dans les sous-faces de dimension inférieure qui ne sont pas entièrement recouvertes on peut même effectuer cette construction en codimension $n - d \geq 1$ quelconque, et imposer que $\phi(E)$ soit une union finie de sous-faces de dimension au plus d de S.

Supposons que $E \in \mathfrak{F}$. Lorsque E est rectifiable, par un lemme de type Vitali on peut recouvrir E à une partie de mesure arbitrairement petite près par une union finie de complexes dyadiques disjoints dont les orientations suivent la direction des plans tangents approximatifs de E. D'après le théorème 1 il est alors possible de relier tous ces complexes dyadiques en un complexe plus grand S de façon à avoir à la fois $E \subset \mathcal{U}(S)$ et $\mathcal{R}(S) > C$ où C ne dépend que de n. En projetant préalablement E sur ses plans tangents approximatifs et en composant avec les projections radiales mentionnées plus haut on peut construire une application lipschitzienne ψ telle que cette fois $E' = \psi(E)$ soit une union finie de sous-faces de dimension au plus d de S et

$$\mathcal{H}^d(E') \leq (1 + \epsilon)\mathcal{H}^d(E). \tag{4}$$

En minimisant parmi les éléments de $\mathfrak{F}$ qui sont des unions de sous-faces de dimension au plus d de S (il y en a un nombre fini) on peut trouver un ensemble polyédrique optimal E'' qui vérifie en particulier

$$\mathcal{H}^d(E'') \leq \mathcal{H}^d(E') \leq (1 + \epsilon)\mathcal{H}^d(E). \tag{5}$$

Par ailleurs pour toute déformation lipschitzienne F de E'' à l'intérieur de $\mathcal{U}(S')$, d'après (3) et puisque E'' est optimal on a

$$\mathcal{H}^d(E'') \leq KC^{-2d}\mathcal{H}^d(F) \tag{6}$$

c'est à dire que E'' est M-quasiminimal avec $M = KC^{-2d}$ qui ne dépend que de d et n.

Pour résumer en considérant une suite minimisante E_k de $\mathfrak{F}$, c'est à dire telle que

$$\lim_{k \to +\infty} \mathcal{H}^d(E_k) = \inf_{F \in \mathfrak{F}} \mathcal{H}^d(F) \tag{7}$$

il est donc possible de construire automatiquement une suite minimisante d'ensembles quasiminimaux polyédriques de $\mathfrak{F}$. Dans ce cas un résultat de Guy