Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MINORATION DU SPECTRE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE DIMENSION 3

Pierre Jammes

Tome 140
Fascicule 2

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 237-255

Bull. Soc. math. France
140 (2), 2012, p. 237–255

MINORATION DU SPECTRE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE DIMENSION 3

PAR PIERRE JAMMES

RÉSUMÉ. — Soit M une variété hyperbolique compacte de dimension 3, de diamètre d et de volume $\leq V$. Si on note $\mu_i(M)$ la i-ième valeur propre du laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les 1-formes coexactes de M, on montre que $\mu_1(M) \geq \frac{c}{d^3 e^{2kd}}$ et $\mu_{k+1}(M) \geq \frac{c}{d^2}$, où $c > 0$ est une constante ne dépendant que de V, et k est le nombre de composantes connexes de la partie mince de M. En outre, on montre que pour toute 3-variété hyperbolique M_∞ de volume fini avec cusps, il existe une suite M_i de remplissages compacts de M_∞, de diamètre $d_i \to +\infty$ telle que et $\mu_1(M_i) \geq \frac{c}{d_i^2}$.

ABSTRACT (*Lower bound of the spectrum on hyperbolic 3-manifolds*)

Let M be a compact hyperbolic 3-manifold of diameter d and volume $\leq V$. If $\mu_i(M)$ denotes the i-th eigenvalue of the Hodge laplacian acting on coexact 1-forms of M, we prove that $\mu_1(M) \geq \frac{c}{d^3 e^{2kd}}$ and $\mu_{k+1}(M) \geq \frac{c}{d^2}$, where $c > 0$ depends only on V, and k is the number of connected component of the thin part of M. Moreover, we prove that for any finite volume hyperbolic 3-manifold M_∞ with cusps, there is a sequence M_i of compact fillings of M_∞ of diameter $d_i \to +\infty$ such that $\mu_1(M_i) \geq \frac{c}{d_i^2}$.

Texte reçu le 10 mars 2011, accepté le 9 juin 2011.

PIERRE JAMMES, Laboratoire J.-A. Dieudonné, Université Nice Sophia Antipolis — CNRS (UMR 6621), Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France • *E-mail :* `pjammes@unice.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 35P15, 58J50, 53C21, 57M50.

Mots clefs. — laplacien de Hodge-de Rham, formes différentielles, variétés hyperboliques.

L'auteur a bénéficié du soutien du projet ANR Geodycos ANR-07-BLAN-0140-01.

1. Introduction

L'objet de cet article est d'étudier le comportement des premières valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles, sur une suite de variétés hyperboliques compactes qui dégénère à volume majoré. Plus précisément on va donner une minoration du spectre en fonction du diamètre de la variété. En dimension 2, le spectre du laplacien de Hodge-de Rham se déduit du spectre du laplacien usuel agissant sur les fonctions, et en dimension supérieure ou égale à 4, à volume majoré, il n'existe qu'un nombre fini de variétés hyperboliques compactes, le problème se réduit donc à la dimension 3.

Rappelons quelques résultats connus sur le spectre des variétés hyperboliques, en commençant par le laplacien agissant sur les fonctions. Pour une suite de métriques hyperboliques sur une surface compacte donnée convergeant vers une variété avec un ou plusieurs cusps, B. Colbois et G. Courtois ont montré dans [6] qu'en restriction à l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$, les valeurs propres convergent vers le spectre de la surface limite. En dimension 3 on ne peut pas déformer la métrique d'une variété compacte dans la classe des métriques hyperboliques, mais W. Thurston a montré qu'une variété avec cusps était limite d'une suite de variétés hyperboliques compactes (voir les rappels fait en section 2). Dans ce contexte, Colbois et Courtois [8] montrent qu'on a convergence du spectre dans l'intervalle $[0, 1[$. Dans [18], F. Pfäffle montre un résultat analogue pour l'opérateur de Dirac en dimension 2 et 3. Par ailleurs, R. Schoen donne dans [19] en toute dimension supérieure ou égale à 3 une minoration uniforme du spectre du laplacien agissant sur les fonctions à volume majoré (voir aussi [12], [10] et [3]).

Dans le cas du laplacien de Hodge agissant sur les p-formes, une variété hyperbolique non compacte de dimension n possède un spectre continu formé de la demi-droite $[\frac{(n-2p-1)^2}{4}, +\infty[$, $p < \frac{n}{2}$. Si $n = 3$, le spectre continu pour les 1-formes est donc $[0, +\infty[$, on s'attend donc a ce que des valeurs propres tendent vers 0 quand une suite de variétés compactes tend vers une variété non compacte. On sait que c'est effectivement le cas ([7], théorème 0.3), et J. McGowan et J.Dodziuk ont étudié plus en détail ce phénomène dans [17] et [11].

Avant d'énoncer les résultats, précisons quelques notations. Sur une variété riemannennne (M, g) compacte sans bord, le laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les p-formes est défini par $\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$ où d désigne la différentielle extérieure et δ la codifférentielle, adjoint L^2 de d. C'est un opérateur positif dont le noyau est canoniquement isomorphe à la cohomlogie de Rham $H^p(M)$ de la variété. Le cas $p = 0$ correspond au laplacien usuel sur les fonctions, dont on notera $0 < \lambda_1(M, g) \leq \lambda_2(M, g) \leq \ldots$ le spectre non nul. Pour $p = 1$, on a la décomposition de Hodge $\Omega^1(M) = \mathrm{d}\Omega^0(M) \oplus \operatorname{Ker}\Delta \oplus \delta\Omega^2(M)$, le spectre non nul est donc la réunion du spectre $(\lambda_i(M,g))$ du laplacien restreint à $\mathrm{d}\Omega^0(M)$ et du spectre restreint à $\delta\Omega^2(M)$ qu'on notera $0 < \mu_1(M,g) \leq \mu_2(M,g) \leq \cdots$. En dimension 3, par dualité de Hodge, le spectre en degré 2 et 3 est le même qu'en degré 1 et 0 respectivement, on est donc ramené à l'étude des $(\mu_i(M,g))$.

Avec ces notations, on peut énoncer les résultats de J. McGowan comme suit :

Théorème 1.1 ([17]). — *Il existe des constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ et $V > 0$ telles que si M, g est une variété hyperbolique compacte de dimension 3 de diamètre d et de volume inférieur à V, alors*

1. $\#\left\{\mu_i(M,g) \leq \dfrac{1}{C_1 V(1+d^2)}\right\} \leq C_2 V$;
2. $\#\left\{\mu_i(M,g) \leq \dfrac{1}{d^2}\right\} \geq C_3 V$.

Ce résultat a été précisé dans [11] en donnant une estimée du nombre de valeurs propres dans un intervalle $[0,x]$ pour une suite de variétés qui dégénère en fonction de la géométrie des différentes composantes de la partie mince de la variété (voir section 2 pour la définition de cette notion), généralisant des résultats analogues pour les fonctions dans l'intervalle $[1, 1+x]$ ([5]), mais en laissant ouvert la question d'une minoration explicite de la première valeur propre en fonction du diamètre.

Le but de l'article est d'y apporter une réponse en démontrant deux résultats de minoration du spectre. Le premier donne une minoration générale qui est exponentielle par rapport au diamètre de la variété pour la première valeur propre, et quadratique pour la $(k+1)$-ième, où k est le nombre de parties minces :

Théorème 1.2. — *Pour tout réel $V > 0$, il existe une constante $c(V) > 0$ telle que si M est une variété hyperbolique compacte de dimension 3 de volume inférieur à V, de diamètre d et possédant k parties minces, alors $\mu_1(M) \geq \frac{c}{d^3 e^{2kd}}$ et $\mu_{k+1}(M) \geq \frac{c}{d^2}$.*

Les estimées de J. Dodziuk et J. McGowan pouvaient laisser espérer une minoration de la première valeur propre qui soit quadratique par rapport au diamètre. Le second résultat de l'article consiste à montrer que pour certaines variétés, on a effectivement une telle minoration :

Théorème 1.3. — *Pour toute variété hyperbolique M_∞ non compacte de dimension 3 et de volume fini, il existe une constante $c > 0$ et une suite (M_i) de remplissages compacts de M_∞, de diamètre $d_i \to +\infty$ et telle que $\mu_1(M_i) \geq \frac{c}{d_i^2}$.*

Un remplissage compact de M_∞ est une variété hyperbolique compacte dont la partie épaisse est topologiquement identique à M_∞ (voir section 2), en particulier le volume des M_i est uniformément majoré.

Si on essaie de généraliser la démonstration de cette minoration à toutes les variétés hyperboliques, une difficulté liée à l'interaction entre les cohomologies des parties mince et épaisse de la variété apparaît. Cet aspect topologique du problème n'avait pas été mis en évidence par les travaux de McGowan et Dodziuk.

Ces résultats laissent la possibilité qu'il existe pour chaque partie mince une petite valeur propre à décroissance exponentielle par rapport au diamètre, mais cette valeur propre n'apparaÓtrait que pour des topologies particulières. Comme en dimension 2, l'existence d'une partie mince n'implique pas forcément l'existence d'une valeur propre exponentiellement petite par rapport au diamètre.

Les résultats de [17] et [11] reposent sur une technique de minoration du spectre (dont l'idée remonte à Cheeger) faisant intervenir un recouvrement de la variété par des ouverts ([17], lemme 2.3). Cette technique échouait à minorer la première valeur propre si la cohomologie des intersections des ouverts du recouvrement était non triviale. Les théorèmes 1.2 et 1.3 reposent sur une amélioration du lemme de McGowan qui permet de minorer cette première valeur propre. Dans une autre direction, le principe d'utiliser des recouvrements pour minorer le spectre du laplacien de Hodge-de Rham a déjà conduit à des résultats très généraux ([4], [16]), mais peu précis quand le rayon d'injectivité est petit, en particulier dans le contexte des variétés hyperboliques de dimension 3.

L'article est organisé comme suit : on fait dans la section 2 des rappels sur la géométrie et la topologie des variétés hyperboliques de dimension 3, la section 3 est consacrée à des minorations du spectre sur les parties mince et épaisse, la généralisation du lemme de McGowan est montré dans la section 4 et pour finir la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3 est donnée dans la section 5.

Je remercie B. Colbois et F. Naud d'avoir attiré mon attention sur ce problème, le rapporteur de l'article d'avoir permis par ses remarques d'améliorer le texte et le laboratoire de mathématiques de l'université d'Avignon de son hospitalité pendant que je menais ce travail à bien.

2. Topologie, géométrie et cohomologie des variétés hyperboliques de dimension 3

2.1. Géométrie et topologie des variétés hyperboliques. — Nous allons rappeler ici plusieurs aspects de la topologie et de la géométrie des variétés hyperboliques de dimension 3 qui interviendront dans la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3. On se référera principalement à [13] et [1].