Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UN COMPLEXE DE KOSZUL DE MODULES INSTABLES ET COHOMOTOPIE D'UN SPECTRE DE THOM

Nguyen Dang Ho Hai

Tome 140
Fascicule 2

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 257-308

Bull. Soc. math. France
140 (2), 2012, p. 257–308

UN COMPLEXE DE KOSZUL DE MODULES INSTABLES ET COHOMOTOPIE D'UN SPECTRE DE THOM

PAR NGUYEN DANG HO HAI

RÉSUMÉ. — Dans [8], les auteurs ont construit une résolution injective minimale d'un module instable dans la catégorie des modules instables *modulo* 2. A partir de cette résolution, un résultat de type conjecture de Segal a été obtenu pour un certain spectre de Thom. Le but de cet article est de refaire ces résultats pour les *premiers impairs*. Etant donné un premier impair p, on construit dans ce travail un complexe de Koszul dans la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p. Une résolution injective d'un module instable intéressant est obtenue comme cas particulier de ce complexe de Koszul. Ce module instable est la cohomologie modulo p d'un spectre de Thom qui apparaît (à p-complétion près) comme l'un des fibres homotopiques non contractiles dans la tour de Goodwillie du foncteur identité évaluée en la sphère S^3. Comme application de cette résolution injective, on calcule quelques groupes de cohomotopie de ce spectre à l'aide du travail de S. Zarati [24] sur les foncteurs dérivés du foncteur de déstabilisation.

ABSTRACT (*A Koszul complex of unstables modules and cohomotopy of a Thom spectrum*)

We constructed in [8] a minimal injective resolution of an unstable module over the *modulo* 2 Steenrod algebra. From this resolution, a Segal conjecture-type result was obtained for a certain Thom spectrum. In this paper we propose to study similar problems *modulo odd primes*. Given p an odd prime, we construct in this work a

---

Texte reçu le 24 mars 2011, accepté le 17 octobre 2011.

NGUYEN DANG HO HAI, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539 du CNRS, Université Paris 13, 99, Av. J-B Clément, 93430 Villetaneuse, France Current address: Institut de Recherche en Mathématique et Physique, 2 Chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique • *E-mail :* `nguyen@math.univ-paris13.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 55S10, 55Q55, 16S37.

Mots clefs. — Complexe de Koszul, module instable, foncteur de déstabilisation.

L'auteur est partiellement soutenu par le projet ANR blanc BLANN08-2_338236, HGRT.

Koszul complex in the category of unstable modules over the mod p Steenrod algebra. An injective resolution of an interesting unstable module is obtained as a special case of this Koszul complex. This unstable module is the mod p cohomology of a Thom spectrum used in the description of the layers of the Goodwillie tower of the identity functor evaluated on the sphere S^3. As an application of the injective resolution, we compute some cohomotopy groups of the Thom spectrum using work of S. Zarati [24] on the derived functors of the destabilisation functor.

1. Introduction

Soient p un premier et $V_n = (\mathbb{Z}/p)^n$ un p-groupe abélien élémentaire. On note ρ_n la représentation réelle régulière réduite de V_n, et pour tout entier naturel m, on note $m\rho_n$ la somme directe de m copies de ρ_n. On considère l'espace de Thom $BV_n^{m\rho_n}$ du fibré vectoriel associé à $m\rho_n$ au-dessus de l'espace classifiant BV_n. L'action naturelle du groupe linéaire général $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ sur V_n induit une action sur l'espace de Thom $BV_n^{m\rho_n}$. On pose $L(n,m) = e_n BV_n^{m\rho_n}$, le facteur stable de $BV_n^{m\rho_n}$ déterminé par l'idempotent de Steinberg [23] e_n de l'anneau $\mathbb{F}_p[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)]$.

Les spectres $L(n,m)$ apparaissent dans la théorie de Goodwillie comme suit. On considère la tour de Goodwillie du foncteur identité de la catégorie des espaces topologiques pointés :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \\
 & P_k(X) \arrow[d, "j_k"] & F_k(X) \arrow[l] \\
 & P_{k-1}(X) \arrow[d] & F_{k-1}(X) \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[d] & \\
X \arrow[uuur, "i_k"] \arrow[uur] \arrow[r, "i_1"] & P_1(X) \arrow[r, equal] & \Omega^\infty\Sigma^\infty(X).
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, le foncteur F_k est la fibre homotopique de la transformation naturelle $j_k\colon P_k \to P_{k-1}$. Il suit de la théorie de Goodwillie [7] que $F_k(X)$

est un espace de lacets infini, *i.e.* il existe un spectre $\mathscr{F}_k(X)$ tel que $F_k(X)$ soit le 0-ième espace de $\mathscr{F}_k(X)$:

$$F_k(X) = \Omega^\infty \mathscr{F}_k(X).$$

En particulier, à p-complétion près, si X est la sphère S^m (m est supposé impair si p est impair), on a

$$\mathscr{F}_k(S^m) \simeq \begin{cases} \Sigma^{m-n} L(n,m) & \text{si } k = p^n, \\ * & \text{sinon.} \end{cases}$$

(voir [3], [2, Thm. 1.9, Cor. 9.6]).

On note $L_{n,m}$ la cohomologie modulo p du spectre $L(n,m)$. On se propose d'analyser $L_{n,m}$ en tant que objet de la catégorie $\mathscr{U}$ [22] des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p, $\mathscr{A}_p$. On sait que $L_{n,0}$ et $L_{n,1}$ sont des modules instables injectifs. Dans [8], on a construit explicitement une résolution injective minimale de $L_{n,2}$ dans la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo **2**. A partir de cette résolution, un résultat de type conjecture de Segal a été obtenu pour les groupes de cohomotopie du spectre $L(n,2)$ (2-complété).

Dans cet article, on étend ces résultats à tout nombre premier *impair*. On profite de cette occasion d'améliorer et de clarifier la construction du complexe fondamental du cas $p = 2$. Pour ce faire on introduit un complexe de Koszul approprié qui permet de généraliser les complexes exacts obtenus et ouvre de nouvelles perspectives. En particulier, en considérant la limite de ces complexes on est amené à introduire une algèbre de Koszul qui mérite une étude plus approfondie.

Dans ce qui suit, on fixe p un nombre premier *impair*. A l'aide de l'isomorphisme de Thom, on peut considérer $L_{n,m}$ comme un sous-module de H^*V_n :

$$L_{n,m} = e_n \cdot (\mathfrak{e}_n^m H^* V_n) \subset H^* V_n,$$

$\mathfrak{e}_n \in H^{p^n-1}V_n$ étant la classe d'Euler de ρ_n. En particulier, on vérifie que $L_n := L_{n,1}$ est un facteur direct indécomposable du module instable injectif H^*V_n [22], donc L_n est un module instable injectif indécomposable.

Pour énoncer les résultats, on considère le module quotient :

$$J_{n,m} := \frac{L_1^{\otimes n}}{\sum_{i=1}^{n-1} L_1^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes L_1^{\otimes n-i-1} + L_1^{\otimes n-1} \otimes L_{1,m}}.$$

On observera que $J_{n,m}$ est un module fini (voir la section 4.14). En particulier, $J_{n,1}$ est trivial.

Voici le premier résultat de cet article.

Théorème 1.1. — *Soient n, m deux entiers positifs avec m impair. Il existe une suite exacte de $\mathscr{A}_p$-modules instables :*

$$0 \to L_{n,m} \to L_n \to L_{n-1} \otimes J_{1,m} \to \cdots \to L_{n-k} \otimes J_{k,m} \to \cdots \to J_{n,m} \to 0.$$

On verra plus bas que cette suite exacte est de type complexe de Koszul. Pour $m = 1$, la suite exacte se réduit à l'identification $L_{n,1} = L_n$ ci-dessus. Afin d'énoncer le résultat pour le cas $m = 3$, on rappelle que le module instable de Brown-Gitler $J(i)$, $i \in \mathbb{N}$, est un module fini caractérisé par l'isomorphisme naturel en $M \in \mathscr{U}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, J(i)) \cong M^{i*}.$$

On rappelle aussi que le produit tensoriel $L_k \otimes J(i)$, $k, i \in \mathbb{N}$, est un module instable injectif indécomposable [13].

Théorème 1.2. — *On a un isomorphisme de modules instables $J_{n,3} \cong J(2p^n - 2)$. En particulier, la suite exacte*

$$L_{n,3} \hookrightarrow L_n \to L_{n-1} \otimes J(2p-2) \to \cdots \to L_{n-k} \otimes J(2p^k - 2) \to \cdots \to J(2p^n - 2) \to 0$$

est une résolution injective minimale de $L_{n,3}$ dans la catégorie $\mathscr{U}$.

On se sert de cette résolution injective pour étudier les groupes de cohomotopie du spectre $L(n,3)$ (p-complété). Rappelons que si X est un spectre, le calcul du groupe de cohomotopie $[X, S^k]$ des classes d'homotopie d'applications de X vers le spectre des suspensions itérées de la sphère S^k est l'une des questions importantes en topologie algébrique. Des cas particuliers ont été étudié ces dernières années parmi lesquels on peut citer la conjecture de Segal [1] concernant le calcul de $[\Sigma^\infty BV_n, S^k]$, $k \geq 0$.

Pour avoir des informations sur les groupes $[L(n,3), S^k]$, on utilise la suite spectrale d'Adams en cohomologie modulo p dont le terme $E_2^{*,*} \cong \mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathscr{A}_p}(\mathbb{Z}/p, L_{n,3})$ est étudié à l'aide des foncteurs dérivés du foncteur de déstabilisation [24] et des propriétés de la résolution injective de $L_{n,3}$ trouvée ci-dessus.

Voici un résultat partiel sur les groupes de cohomotopie du spectre $L(n,3)$ (p-complété).

Théorème 1.3. — *Supposons $k \geq 2p^{n-2} + n$. Alors*

$$[L(n,3), S^k] = \begin{cases} \mathbb{Z}/p & si\ k = 2p^n - 2 + n, \\ \mathbb{Z}/p & si\ k = 2p^{n-1} - 1 + n, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$