Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SINGULARITÉS À L'INFINI ET INTÉGRATION MOTIVIQUE

Michel Raibaut

Tome 140
Fascicule 1

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 51-100

Bull. Soc. math. France
140 (1), 2012, p. 51–100

SINGULARITÉS À L'INFINI ET INTÉGRATION MOTIVIQUE

PAR MICHEL RAIBAUT

RÉSUMÉ. — Soit k un corps de caractéristique nulle et f une fonction non constante définie sur une variété lisse. Nous définissons dans cet article une *fibre de Milnor motivique à l'infini* qui appartient à un anneau de Grothendieck des variétés. Elle est définie en termes d'une compactification choisie, non nécessairement lisse, mais est indépendante de ce choix. Lorsque k est le corps des nombres complexes, en utilisant le morphisme de réalisation de Hodge, elle se réalise en le spectre à l'infini de f. Nous la calculons par exemple, dans le cas d'un polynôme non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini.

Pour toute valeur a, nous définissons une *fibre de Milnor motivique complète* $S_{f,a}$ qui prolonge la fibre de Milnor motivique usuelle S_{f-a}. Ceci permet d'introduire des *valeurs motiviquement atypiques*, un *ensemble de bifurcation motivique* de f et une notion de *fonction motiviquement modérée.*

ABSTRACT (*Singularities at infinity and motivic integration*). — Let k be a field of characteristic zero and f be a non constant function defined on a smooth variety. We construct in this article a *motivic Milnor fiber at infinity* which belongs to a Grothendieck ring of varieties. It is defined in terms of a chosen compactification, not necessary smooth, but is shown to be independent of this choice. When k is the field of complex numbers, using the Hodge realization morphism, it specializes to the

Texte reçu le 29 novembre 2010, accepté le 29 avril 2011.

MICHEL RAIBAUT, Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2, France and University catholic of Leuven, Department of Mathematics, Celestijnenlaan 200 B,B-3001 Leuven (Heverlee), Belgium •
E-mail : `raibaut@unice.fr`

Ce travail a bénéficié d'une aide des Agences Nationales de la Recherche portant les références ANR-08-JCJC-0118-01, et ANR-06-BLAN-0183, d'une aide du Projet de Recherche G.0318.06N de la Fondation de Recherche - Flandre (FWO) et d'une aide du projet ERC Advanced Grant NMNAG.

spectrum at infinity of f. As an example, we compute it in the case of a Laurent polynomial non-degenerated with respect to its Newton polyhedron at infinity.

For each value a, we define a complete motivic Milnor fiber $S_{f,a}$. This object is an extension of the usual motivic Milnor fiber S_{f-a}. Then we introduce *motivic atypical values*, a *motivic bifurcation set* of f and a notion of *motivically tame function*.

Introduction

Soit U une variété algébrique complexe lisse et $f : U \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ une application régulière non constante. Il existe un ensemble fini minimal $\mathscr{B}$, appelé *ensemble de bifurcation* tel que $f : U \setminus f^{-1}(\mathscr{B}) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathscr{B}$ soit une fibration topologique localement triviale. L'ensemble des valeurs critiques de f est contenu dans l'ensemble de bifurcation, mais l'inclusion peut être stricte. Par exemple le polynôme $x(xy-1)$ considéré par Broughton [4] est une fonction lisse sur $\mathbb{C}^2$ et toutes ses fibres sont connexes exceptée celle en 0. Les valeurs de bifurcation non critiques sont dues à des « singularités à l'infini ». Hà et Lê [45] donnent une description complète de l'ensemble de bifurcation dans le cas des courbes. Précisément, une valeur a est de bifurcation si et seulement si la caractéristique d'Euler de sa fibre diffère de la caractéristique d'Euler de la fibre générique. En dimension quelconque le problème est ouvert, voir Broughton [4], Cassou-Noguès et Dimca [6], Némethi et Zaharia [28], Parusiński [30], Tibăr [41] et [42], et Zaharia [46].

De nombreuses définitions de bon comportement à l'infini ont été introduites pour les fonctions polynomiales. Broughton [4] définit les polynômes modérés, généralisés ensuite par Némethi et Zaharia [29] en les polynômes M-modérés, puis en les polynômes sans singularités à l'infini par Siersma et Tibăr [39]. Pour une large classe de polynômes contenant ceux cités ci-dessus, il existe une analogie forte entre les propriétés des singularités isolées et les propriétés de ces polynômes. La fibre générique de la fibration a par exemple, comme pour les singularités isolées, le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension $\dim U - 1$. Parusiński [31] et Sabbah [36] ont enfin introduit la classe des *polynômes cohomologiquement modérés* pour traîter des questions cohomologiques sur $\mathbb{Q}$. Les différentes classes introduites ci-dessus ne se contiennent pas entre elles et on appelle *polynôme faiblement modéré* l'un de leurs éléments [27].

Les espaces de cohomologie à support compact $H^*_c\left(f^{-1}(t), \mathbb{Q}\right)$ de la fibre en t sont munis d'une structure de Hodge mixte naturelle [8]. Steenbrink et Zucker [40] puis M. Saito [38] ont montré comment construire une *structure de Hodge mixte limite* lorsque t tend vers l'infini. Sabbah [35] l'a retrouvée en considérant la transformation de Fourier sur des modules convenables sur l'anneau des opérateurs différentiels. En particulier si $(X, i, \hat{f})$ est une compactification lisse de f, et $1/\hat{f}$ prolonge $1/f$, la structure de Hodge mixte limite sur $H_c^k(f^{-1}(t), \mathbb{Q})$ s'identifie alors à la structure de Hodge mixte du i-ème groupe d'hypercohomologie à support compact $\mathbb{H}_c^k(\hat{f}^{-1}(\infty), \psi_{1/\hat{f}}(Ri_! \underline{\mathbb{Q}}_U))$ de la fibre à l'infini, à coefficients dans le faisceau des cycles proches de $1/\hat{f}$ évalué sur l'extension par 0 du faisceau constant sur U. On pourra consulter [35, (5.5)]. Le spectre de cette structure limite est un invariant du polynôme f appelé *spectre à l'infini*, il a notamment été étudié (souvent pour la cohomologie sans support) par Brélivet [2] et [3], Dimca [12], García-López et Némethi [14], [16] et [15], Némethi et Sabbah [27] et Sabbah [35] et [37].

Considérons maintenant une fonction $g : X \to \mathbb{A}^1$ définie sur une variété algébrique lisse. Soit x un point fermé de $g^{-1}(0)$. En utilisant l'intégration motivique, Denef et Loeser [9] [11] introduisent la *fibre de Milnor motivique* $S_{g,x}$. Cet objet appartient à un anneau de Grothendieck des variétés virtuelles munies d'une action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. Il se réalise, dans l'anneau de Grothendieck des structures de Hodge munies d'un endomorphisme quasi-unipotent noté $K_0(SH^{\mathrm{mon}})$, en la classe de la structure de Hodge mixte limite de la fibre de Milnor de g en x. Il permet en particulier de retrouver le spectre de Hodge-Steenbrink $\mathrm{Sp}(g, x)$ [9].

Pour toute immersion ouverte $i : U \to X$, Bittner [1] grâce au théorème de factorisation faible, puis Guibert, Loeser et Merle [19] à l'aide d'arcs raisonnablement tangents au fermé complémentaire, construisent $S_{g,U}$, un analogue motivique du faisceau $\Psi_g(Ri_! \underline{\mathbb{Q}}_U)$. Ils étendent ainsi la fibre de Milnor motivique en un morphisme additif défini sur un anneau de Grothendieck des variétés relatives $Y \to X$. Dans la partie 1, nous rappelerons cela et nous fixerons les notations utilisées par la suite.

Ainsi, pour un morphisme $f : U \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ à source lisse, en considérant U comme ouvert dans une compactification, nous définissons dans la partie 2 une *fibre de Milnor motivique à l'infini* $S_{f,\infty}$. Cet objet est un nouvel invariant de f qui ne dépend d'aucune compactification et se réalise dans l'anneau $K_0(SH^{\mathrm{mon}})$ en la classe de la structure de Hodge mixte à l'infini. En particulier cette variété virtuelle munie d'une action de $\mathbb{G}_m$ permet de retrouver le spectre à l'infini de f.

Pour une fonction polynomiale f s'annulant en 0 et non dégénérée pour son polyèdre de Newton Γ en 0, Guibert [17] calcule la fibre de Milnor motivique de f au point 0, en termes du polyèdre Γ . Ce calcul se fait sans résolution des singularités et est valable sur tout corps de caractéristique 0. Dans la partie 3, pour f un polynôme non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini Γ, nous calculons de manière similaire, la fibre de Milnor motivique de f à l'infini, en termes de Γ. Nous obtenons ainsi, une décomposition du spectre à l'infini de f en termes de spectres de variétés quasi-homogènes. Ces résultats étaient annoncés dans [34].

Enfin dans la partie 4, nous définissons pour toute valeur a, une *fibre de Milnor motivique « complète »* $S_{f,a}$ qui ne dépend pas de la compactification et qui prolonge la fibre de Milnor motivique classique S_{f-a}. En particulier dans le cas d'un polynôme homogène, $S_{f,0}$ et $S_{f,\infty}$ s'échangent par une inversion. Ceci nous permet de définir des cycles évanescents motiviques à l'infini et un *ensemble de bifurcation motivique* contenu dans un discriminant universel, obtenu en considérant toutes les compactifications et leurs log-résolutions. En particulier, nous dirons qu'une fonction est *motiviquement modérée* si et seulement si elle n'a pas de cycles évanescents motiviques à l'infini. Cette propriété est un analogue motivique de la notion de polynôme cohomologiquement modéré. Dans ce cas là l'ensemble de bifurcation motivique est égal au discriminant du polynôme. Nous montrons par exemple, qu'un polynôme commode et non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini est motiviquement modéré.

Signalons les travaux en cours de Matsui-Takeuchi [26] et [25]. Les auteurs introduisent une fibre de Milnor motivique à l'infini à l'aide de résolutions des singularités, sans prouver toutefois l'indépendance de l'objet vis à vis de la compactification. Dans le cas d'un polynôme non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini, ils décrivent les blocs de Jordan de la monodromie à l'infini en termes du polyèdre de Newton.

L'auteur tient à remercier les professeurs Johannes Nicaise et Wim Veys pour leur invitation pendant l'automne 2010 au département de mathématiques de l'université de Leuven où cet article a été rédigé.

L'auteur tient particulièrement à remercier Michel Merle, pour l'avoir intéressé aux questions ci-dessus, pour ses conseils et enfin pour toute l'attention qu'il a portée à ce travail au cours de sa réalisation.

L'auteur témoigne enfin toute sa gratitude au referee pour ses suggestions qui lui ont permis d'améliorer ce texte.

1. Fibre de Milnor motivique

Dans cette partie nous présentons les outils utilisés par la suite. On pourra se référer aux articles [11], [23], [24] puis [19] et [18].

1.1. Anneaux de Grothendieck

1.1.1. *Variétés.* — Dans tout ce qui suit, k est un corps de caractéristique 0 et $\mathbb{G}_m$ est son groupe multiplicatif. On appelle *k-variété*, un schéma séparé réduit de type fini sur k. Si X est un schéma, on notera X_{red} le schéma réduit associé. On note Var_k la catégorie des k-variétés et pour une k-variété S on note Var_S la catégorie des S-variétés, c'est à dire des morphismes $X \to S$ dans Var_k. Soit