Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

QUELQUES « FORMULES DE MASSE » RAFFINÉES EN DEGRÉ PREMIER

Chandan Singh Dalawat

Tome 140
Fascicule 4

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 599-606

Bull. Soc. math. France
140 (4), 2012, p. 599–606

QUELQUES « FORMULES DE MASSE » RAFFINÉES EN DEGRÉ PREMIER

PAR CHANDAN SINGH DALAWAT

Dans la théorie des équations, j'ai recherché dans quels cas les équations étaient résolubles par des radicaux.
Évariste Galois, 29 mai 1832.

RÉSUMÉ. — Pour un corps local à corps résiduel fini de caractéristique p, nous donnons quelques raffinements de la formule de masse de Serre en degré p qui nous permettent de calculer par exemple la contribution des extensions cycliques, ou celles dont la clôture galoisienne a pour groupe d'automorphismes un groupe donné à l'avance, ou possède des propriétés de ramification également données à l'avance.

ABSTRACT (*Some refined prime degree "mass formulas"*). — For a local field with finite residue field of characteristic p, we give some refinements of Serre's mass formula in degree p which allow us to compute for example the contribution of cyclic extensions, or of those whose Galoisian closure has a given group as group of automorphisms, or has ramification properties given in advance.

Texte reçu le 6 février 2012, accepté le 21 septembre 2012.

CHANDAN SINGH DALAWAT, Harish-Chandra Research Institute, Chhatnag Road, Jhunsi, Allahabad 211019, Inde • *E-mail :* dalawat@gmail.com

Classification mathématique par sujets (2010). — 11S15, 11S20.

Mots clefs. — Formule de masse de Serre.

1. Introduction

Soient p un nombre premier, k une extension finie de $\mathbf{F}_p$ de degré $f=[k:\mathbf{F}_p]$ et de cardinal $q=p^f$, et F un corps local de corps résiduel k. On sait que F est alors ou bien une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ d'indice de ramification $e=[F:\mathbf{Q}_p]/f$, ou bien le corps $k((T))$. On désigne par $v:F^\times\to\mathbf{Z}$ la valuation normalisée de F.

Soit $\mathscr{T}_p(F)$ l'ensemble de toutes les extensions séparables $E|F$ (totalement) ramifiées de degré $[E:F]=p$ contenues dans une clôture algébrique donnée de F. Pour toute $E\in\mathscr{T}_p(F)$ de discriminant $\delta_{E|F}$, Serre pose $c(E)=v(\delta_{E|F})-(p-1)$; c'est un entier strictement positif qui mesure la ramification sauvage de $E|F$. Le cas de degré p de la formule de masse de Serre dit que $\sum_E q^{-c(E)}=p$: la masse de $\mathscr{T}_p(F)$ vaut p [4].

La formule de masse en tout degré fut également démontrée par Krasner [3] peu après.

Notre but dans cette Note est de calculer la masse de diverses parties de $\mathscr{T}_p(F)$, par exemple celle des extensions E qui sont cycliques sur F, ou celle des extensions E dont la clôture galoisienne $\tilde{E}$ a pour groupe $\mathrm{Gal}(\tilde{E}|F)$ un groupe Γ donné à l'avance, ou encore celle des extensions telles que $\tilde{E}=EF'$, pour une extension $F'|F$ fixée.

On pose $K=F(\sqrt[p-1]{F^\times})$ et $G=\mathrm{Gal}(K|F)$; K est l'extension abélienne maximale de F d'exposant divisant $p-1$. Noter que K contient p racines p-ièmes de 1 si $\mathrm{car}(F)=0$; on désigne par $\omega:G\to\mathbf{F}_p^\times$ le caractère cyclotomique donnant l'action de G sur lesdites racines, et l'on pose $\omega=1$ si $\mathrm{car}(F)=p$.

Il résulte essentiellement du critère de résolubilité de Galois que, pour tout $E\in\mathscr{T}_p(F)$, l'extension composée EK est cyclique de degré p sur K et galoisienne sur F. Inversement, toute extension cyclique $L|K$ de degré p qui est galoisienne sur F provient d'une extension séparable de degré p de F. Par ailleurs, les extensions cycliques $L|K$ de degré p sont en bijection avec les $\mathbf{F}_p$-droites $D\subset K^\times/K^{\times p}$ en caractéristique 0, respectivement $D\subset K^+/\wp(K^+)$ en caractéristique p, où $\wp(x)=x^p-x$. Les L qui sont galoisiennes sur F correspondent aux D qui sont G-stables.

Ce qui précède définit une application $\mathscr{T}_p(F)\to\mathrm{Hom}(G,\mathbf{F}_p^\times)$ qui envoie toute E sur le caractère $\chi:G\to\mathbf{F}_p^\times$ à travers lequel G agit sur la $\mathbf{F}_p$-droite D telle que $EK=K(\sqrt[p]{D})$ ou $EK=K(\wp^{-1}(D))$, suivant les cas. Si $E|F$ est cyclique, alors $\chi=\omega$.

Notre résultat principal (prop. 1) calcule la contribution $\sum_{E\mapsto\chi}q^{-c(E)}$ de chaque caractère $\chi:G\to\mathbf{F}_p^\times$ à la formule de masse de Serre en degré p.

L'accouplement parfait $G\times(F^\times/F^{\times p-1})\to\mathbf{F}_p^\times$ identifie le groupe $\mathrm{Hom}(G,\mathbf{F}_p^\times)$ avec $F^\times/F^{\times p-1}$; le caractère ω s'identifie à $\overline{-p}$ si $\mathrm{car}(F)=0$, à $\bar{1}$

si $\mathrm{car}(F) = p$. On peut donc parler de la « valuation » $\bar{v}(\chi) \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ d'un caractère $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$; on a $\bar{v}(\omega) \equiv e$ ou $\equiv 0 \pmod{p-1}$ respectivement.

Pour un caractère $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ et un indice $i \in [0, e[$ (resp. $i \in \mathbf{N}$), definissons $j_{\chi,i} \in [1, p[$ par la condition $\bar{v}(\chi) \equiv \bar{v}(\omega) - (i + j_{\chi,i}) \pmod{p-1}$.

PROPOSITION 1.1. — *La contribution* $\sum_{E \mapsto \chi} q^{-c(E)}$ *de* χ *à la formule de masse de Serre en degré* p *vaut*

$$\frac{p(q-1)}{(p-1)} \sum_i q^{i-(ip+j_{\chi,i})} \qquad \begin{cases} i \in [0, e[& \textit{si } \mathrm{car}(F) = 0, \\ i \in \mathbf{N} & \textit{si } \mathrm{car}(F) = p, \end{cases} \tag{1}$$

sauf si $\chi = 1$ *et* $\mathrm{car}(F) = 0$, *auquel cas les extensions très ramifiées contribuent par un terme* $p/q^{(p-1)e}$ *supplémentaire.*

[Bien entendu, on retrouve la formule de masse de Serre en degré p en ajoutant les contributions de tous les χ.]

Voir §3 pour la démonstration. Rappelons que $E \in \mathcal{T}_p(F)$ est dite très ramifiée si $p \mid c(E)$; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\mathrm{car}(F) = 0$ et $c(E) = ep$.

Il est facile d'évaluer la somme (1), en notant que si $i \equiv i' \pmod{p-1}$, alors $j_{\chi,i} = j_{\chi,i'}$. En caractéristique 2, on a $G = \{1\}$ qui n'a qu'un seul caractère. En caractéristique $p \neq 2$, on a le

COROLLAIRE 1.2. — *Si* $p \neq 2$, $F = k((T))$ *et si* $\bar{v}(\chi) \equiv -a \pmod{p-1}$ *pour un* $a \in [0, p-1[$, *alors la contribution* $\sum_{E \mapsto \chi} q^{-c(E)}$ *de* χ *vaut*

$$\frac{p(q-1)}{(p-1)} \left(\frac{q^{p-2}(q^{(p-2)a} - 1)}{q^{(p-1)a}(q^{p-2} - 1)} + \frac{q^{p-2}(q^{(p-2)(p-1)} - 1)}{q^{(p-1)a}(q^{p-2} - 1)(q^{(p-1)^2} - 1)} \right). \tag{2}$$

Le cas $\chi = 1$ *donne la contribution des extensions cycliques dans* $\mathcal{T}_p(F)$.

Les formules sont légèrement plus compliquées en caractéristique 0 mais résultent de la même méthode ; nous ne les explicitons que dans un cas particulier.

COROLLAIRE 1.3. — *Supposons que* $F|\mathbf{Q}_p$ *est une extension finie et écrivons* $e-1 = (p-1)m+s$ *(avec* $s \in [0, p-1[$, $m \in \mathbf{N}$*). Pour tout caractère* $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ *de « valuation »* $\bar{v}(\chi) \equiv e \pmod{p-1}$, *la contribution* $\sum_{E \mapsto \chi} q^{-c(E)}$ *de* χ *vaut*

$$\frac{p(q-1)}{(p-1)q^{p-1}} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{p-2} q^{-(p-1)^2 n - (p-2)r} + \sum_{r=0}^{s} q^{-(p-1)^2 m - (p-2)r} \right) \tag{3}$$

sauf si $\chi = 1$, *auquel cas les extensions très ramifiées contribuent par un terme* $p/q^{(p-1)e}$ *supplémentaire. En particulier, le cas* $\chi = \omega$ *donne les contributions des extensions cycliques dans* $\mathcal{T}_p(F)$ *suivant que* $\omega \neq 1$ *ou* $\omega = 1$.

Remarque 4. — Soit $E \in \mathcal{T}_p(F)$ et soit $D \subset K^\times/K^{\times p}$ ou $D \subset K^+/\wp(K^+)$ la droite telle que $EK = K(\sqrt[p]{D})$ ou $EK = K(\wp^{-1}(D))$ respectivement. Si le caractère $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ donne l'action de G sur D, alors $\omega\chi^{-1}$ donne l'action de G sur $\mathrm{Gal}(EK|K)$.

Remarque 5. — Le caractère χ permet de récupérer $\tilde{E}_1 \subset \tilde{E}$, l'extension maximale modérément ramifiée de F dans la clôture galoisienne $\tilde{E}$ de $E|F$. En effet, $\tilde{E}_1 = K^{G_\chi}$, où $G_\chi = \mathrm{Ker}(\omega\chi^{-1})$. On a aussi $\tilde{E} = EK^{G_\chi}$.

Exemple 6. — Fixons une extension $F' \subset K$ de F. La contribution des $E \in \mathcal{T}_p(F)$ telles que $\tilde{E} = EF'$ est la somme des contributions de tous les χ tels que $K^{G_\chi} = F'$.

Exemple 7. — De même, la contribution des $E \in \mathcal{T}_p(F)$ telles que $\tilde{E}_1|F$ soit non ramifiée est la somme des contributions de tous les caractères $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ tels que $\bar{v}(\omega\chi^{-1}) \equiv 0 \pmod{p-1}$.

Remarque 8. — Le caractère χ détermine le groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(\tilde{E}|F)$ à isomorphisme près. En effet, Γ est l'extension de $\mathrm{Im}(\omega\chi^{-1}) \subset \mathbf{F}_p^\times$ par le groupe $P = \mathrm{Gal}(\tilde{E}|\tilde{E}_1)$ d'ordre p (avec l'identification $\mathrm{Aut}\, P = \mathbf{F}_p^\times$).

Exemple 9. — Cette remarque permet de calculer la contribution de toutes les $E \in \mathcal{T}_p(F)$ telles que $\mathrm{Gal}(\tilde{E}|F)$ soit isomorphe à un groupe Γ (extension canonique d'un sous-groupe de $\mathbf{F}_p^\times = \mathrm{Aut}\, P$ par un groupe P d'ordre p) donné à l'avance. C'est la somme des contributions de tous les $\chi : G \to \mathbf{F}_p^\times$ tels que $\mathrm{Card}\,\mathrm{Im}(\omega\chi^{-1}) = (\mathrm{Card}\,\Gamma)/p$.

Remarque 10. — Soit $b^{(i+1)}$ la suite des entiers positifs premiers à p, de sorte que $b^{(i+1)} = i + 1 + \lfloor i/(p-1) \rfloor$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. Réconcilier le cas $\chi = \omega$ de la prop. 1 avec les formules (1)–(3) de [1, prop. 14–16] revient à vérifier l'identité

$$ip + j_{\omega,i} = (p-1)b^{(i+1)}$$

pour tout $i \in \mathbf{N}$. Écrivant $i = (p-1)n + r$ (avec $r \in [0, p-1[$, $n \in \mathbf{N}$), nous avons $j_{\omega,i} = p - 1 - r$ et $b^{(i+1)} = i + 1 + n$, d'où l'identité.

2. Modules galoisiens filtrés

Dans ce § nous rappelons la structure du $\mathbf{F}_p[G]$-module filtré $K^\times/K^{\times p}$ en caractéristique 0 et $K^+/\wp(K^+)$ en caractéristique p. Le lecteur est prié de se rapporter au §6 de [2], ou plutôt de arXiv:1004.2016v6, pour les démonstrations.

Nous allons construire de toute pièces un $\mathbf{F}_p[G]$-module filtré auquel $K^\times/K^{\times p}$ (resp. $K^+/\wp(K^+)$) est isomorphe.

On note $\mathfrak{o} \subset K$ l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$ son unique idéal maximal, et $l = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ son corps résiduel ; on a $\mathrm{Gal}(l|k) = G/G_0$, où $G_0 \subset G$ est le sous-groupe d'inertie de $G = \mathrm{Gal}(K|F)$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on désigne par $l[n]$ le $k[G]$-module $\mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1}$, de sorte que $l[0] = l$. Si $m \equiv n \pmod{p-1}$, les $k[G]$-modules $l[m]$,