Bull. Soc. math. France
141 (1), 2013, p. 131–196

SUR LES VARIÉTÉS $X \subset \mathbb{P}^N$ TELLES QUE PAR n POINTS PASSE UNE COURBE DE X DE DEGRÉ DONNÉ

PAR LUC PIRIO & JEAN-MARIE TRÉPREAU

RÉSUMÉ. — Soit $r \geq 1$, $n \geq 2$, et $q \geq n-1$ des entiers. On introduit la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ des sous-variétés X de dimension $r+1$ d'un espace projectif, telles que

- pour $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe rationnelle normale de degré q, contenue dans X et passant par les points $x_1, \ldots, x_n$;
- X engendre un espace projectif dont la dimension, pour r, n et q donnés, est la plus grande possible compte tenu de la première propriété.

Sous l'hypothèse $q \neq 2n-3$, on détermine toutes les variétés X appartenant à la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. On montre en particulier qu'il existe une variété $X_0 \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ de degré minimal $n-1$ et une application birationnelle $X_0 \dashrightarrow X$ qui envoie une section de X_0 par un $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{r+n-1}$ générique sur une courbe rationnelle normale de degré q.

Sans hypothèse sur q, on définit sur l'espace des courbes rationnelles normales de degré q contenues dans la variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ une structure quasi-grassmannienne. La variété X est de la forme précédente si et seulement si cette structure est localement isomorphe à la structure standard, celle de la grassmannienne des $(n-1)$-plans de $\mathbb{P}^{r+n-1}$.

Le problème de la détermination des variétés $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(2n-3)$ reste ouvert. Nous donnons quelques exemples de variétés des classes $\mathcal{X}_{r+1,3}(3)$ et $\mathcal{X}_{r+1,4}(5)$ qui ne sont pas de la forme qu'on vient de décrire.

Nous avons été conduits à l'étude des variétés $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ par nos travaux sur le problème de l'algébrisation des d-tissus, de codimension r sur une variété de dimension

Texte reçu le 25 février 2011, accepté le 26 juillet 2011.

LUC PIRIO, IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université Rennes1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex. • *E-mail :* `luc.pirio@univ-rennes1.fr`

JEAN-MARIE TRÉPREAU, U.P.M.C., UMR 7586 du CNRS, bureau 26-16-5-21, 4 place Jussieu, 75005 Paris. • *E-mail :* `trepreau@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 14N (14M22, 14J40), 53A (53A40, 53C10).

Mots clefs. — Variété projective, variété rationnellement connexe, courbe rationnelle normale, variété de degré minimal, stucture quasi-grassmannienne.

rn, qui sont de rang maximal. Ce problème, considéré d'abord, dans cette généralité, par Chern et Griffiths [3]–[4], a été récemment résolu pour $r = 1$ dans Trépreau [22]. Le cas général fait l'objet d'un article en cours de préparation, qui utilise le résultat principal obtenu ici, voir Pirio-Trépreau [19].

Abstract (*On varieties $X \subset \mathbb{P}^N$ such that a curve of X of given degree passes through n points of X*)

For given integers $r \geq 1$, $n \geq 2$ and $q \geq n-1$, we introduce the class $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ of $(r+1)$-dimensional subvarieties X of a projective space, such that:

– any generic set of n points of X is contained in a rational normal curve on X, of degree q;
– X spans a projective space the dimension of which is the biggest possible, considering the first property.

Our main result is the following.

Theorem. — *If $q \neq 2n-3$ and $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$, there exists a variety X_0 in $\mathbb{P}^{r+n-1}$, of dimension $r+1$ and minimal degree $n-1$, and a birational map $X_0 \dashrightarrow X$, such that a section of X_0 by a generic $\mathbb{P}^{n-1}$ is mapped onto a rational normal curve of degree q.*

Without any assumption on q, we say that a variety $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ is *standard* if it satisfies the conclusion of the preceding theorem.

Building upon the classification of varieties of minimal degree, which is well-known, we give a complete classification of standard varieties in each class $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$.

The existence and classification of non-standard varieties $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(2n-3)$, for $r \geq 2$ and $n \geq 3$, remains an open problem. However, though the condition $q \neq 2n-3$ in the theorem above may not be sharp, we give examples of non-standard varieties in $\mathcal{X}_{r+1,3}(3)$ and in $\mathcal{X}_{r+1,4}(5)$.

In the general case, if $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$, we show that the space of rational normal curves of degree q on X carries a natural quasi-grassmannian structure. Our second main result is:

Theorem. — *A variety $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ is standard if and only if the associated quasi-grassmannian structure is integrable, that is locally isomorphic to the natural stucture of the grassmannian of $(n-1)$-planes in $\mathbb{P}^{r+n-1}$.*

In a forthcoming paper we shall apply our results to the so-called *Problem of algebraization of webs of maximal rank*, giving in most cases a solution to a question first raised, in this generality, by Chern and Griffiths.

1. Introduction

1.1. Les classes $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. — On considère un problème de géométrie projective complexe, auquel nous ont conduits nos travaux récents sur l'algébrisation des tissus de rang maximal, voir la Section 1.6 ainsi que Pirio-Trépreau [19].

Soit $r \geq 1$, $n \geq 2$ et $q \geq n-1$ des entiers.

Définition 1.1. — On note $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ la classe des variétés X, sous-variétés algébriques irréductibles de dimension $r+1$ d'un espace projectif quelconque, telles que :

1) pour $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe rationnelle normale de degré q, contenue dans X et passant par les points $x_1, \ldots, x_n$;
2) X engendre un espace projectif dont la dimension, notée $\pi_{r,n}(q)$, est la plus grande possible, compte tenu de la première propriété.

La dimension $\pi_{r,n}(q)$ de l'espace engendré par une variété de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ est donnée par la formule (1) de la section suivante.

Notre résultat principal sera la détermination de toutes les variétés X de la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ sous l'hypothèse $q \neq 2n-3$. Le cas $q = 2n-3$ restera ouvert.

L'hypothèse d'irréductibilité est en fait une conséquence des autres hypothèses, la démonstration est laissée au lecteur. On peut aussi remplacer la Propriété 1) par la Propriété 1') suivante, plus faible :

1') pour $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe irréductible de degré $\leq q$, contenue dans X et passant par les points $x_1, \ldots, x_n$,

sans modifier la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ que l'on définit, voir la Proposition 2.2.

Il est tentant de penser, mais nous ne le démontrons pas, qu'on peut même la remplacer par la Propriété 1") suivante, encore plus faible :

1") pour $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe irréductible contenue dans X, passant par $x_1, \ldots, x_n$ et engendrant un espace de dimension $\leq q$.

1.2. Le théorème de la borne. — Notre première tâche est de déterminer la dimension $\pi_{r,n}(q)$ de l'espace engendré par une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$. Ce sera la seule démonstration de l'introduction. Elle est assez typique de cet article.

Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété algébrique irréductible de dimension $r+1$. On note $\langle X \rangle$ le sous-espace projectif qu'elle engendre, X_{reg} sa partie régulière, X_{sing} sa partie singulière. On note $\mathrm{CRN}_q(X)$ l'ensemble des courbes rationnelles normales de degré q contenues dans X. Si $\mathbb{L}$ et $\mathbb{L}'$ sont des sous-espaces d'un espace projectif, on note $\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}'$ le sous-espace qu'ils engendrent s'il est de dimension (maximale) $\dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{L}' + 1$ et on dit que c'est *la somme directe projective* de $\mathbb{L}$ et de $\mathbb{L}'$.

La notion d'espace osculateur ou d'osculateur sera omniprésente dans la suite. Étant donné $x \in X_{\text{reg}}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $X_x(k)$ *l'osculateur à l'ordre k de X en x*. C'est par exemple le sous-espace projectif de $\langle X \rangle \subset \mathbb{P}^N$ passant par x et dont la direction est le sous-espace vectoriel de $T_x\mathbb{P}^N$ engendré, dans une carte affine identifiée à $\mathbb{C}^N$, mais la définition ne dépend pas de cette identification, par les dérivées $v'(0), \ldots, v^{(k)}(0)$ des germes de courbes paramétrées $v : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ telles que $v(0) = x$. C'est une notion projective.

On a toujours

$$\dim X_x(k)+1 \leq \binom{r+1+k}{r+1}.$$

On dit que X est *k-régulière* en $x \in X_{\mathrm{reg}}$ si l'inégalité ci-dessus est une égalité et que X est k-régulière si X est k-régulière au point générique de X.

Comme la notion d'osculateur joue un grand rôle dans cet article, on rappelle dans l'Appendice les propriétés, toutes élémentaires, qu'on utilisera sans référence, avec au moins des esquisses de démonstrations. Le lecteur est invité à consulter les quelques énoncés de cet appendice.

La deuxième propriété dans la Définition 1.1 est précisée par l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ engendre un espace de dimension le nombre $\pi_{r,n}(q)$ donné par*

$$\pi_{r,n}(q)+1 = m\binom{r+\rho+1}{r+1} + (n-1-m)\binom{r+\rho}{r+1}, \tag{1}$$

où $q=\rho(n-1)+m-1$ est la division euclidienne de q par $n-1$.

On démontre ici la seule partie de l'énoncé qui est nouvelle : si l'on définit le nombre $\pi_{r,n}(q)$ par (1), une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ engendre un espace de dimension $\leq \pi_{r,n}(q)$. À la terminologie près, le fait qu'il existe des variétés projectives qui vérifient la première propriété dans la Définition 1.1 et qui engendrent un espace de dimension $\pi_{r,n}(q)$ est déjà connu, voir la Section 1.5 et le Chapitre 5.

Démonstration. — Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une sous-variété de dimension $r+1$, vérifiant la première propriété dans la Définition 1.1. Par définition, il existe un n-uplet $(a_1,\dots,a_n) \in (X_{\mathrm{reg}})^n$ de points deux-à-deux distincts tel que, pour tout $x \in X$ voisin de a_n, il existe une courbe $C(x) \in \mathrm{CRN}_q(X)$ passant par les points $a_1,\dots,a_{n-1}$ et x.

Considérons des osculateurs

$$X_{a_i}(\rho_i) \ \ (i=1,\dots,n-1), \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n-1}(\rho_i+1) = q+1.$$

Une courbe $C(x)$ est contenue dans l'espace engendré par ses osculateurs $C(x)_{a_i}(\rho_i)$, donc dans celui engendré par les osculateurs $X_{a_i}(\rho_i)$, $i = 1,\dots,n-1$. Comme les courbes $C(x)$ recouvrent un voisinage de a_n dans X, cet espace contient aussi X et donc :

$$\dim\langle X\rangle + 1 \leq \sum_{i=1}^{n-1}\binom{r+1+\rho_i}{r+1}. \tag{2}$$

Il suffit de prendre $\rho_i = \rho$ pour m valeurs de i et $\rho_i = \rho - 1$ pour les $n - m - 1$ autres valeurs de i. On obtient le résultat. □

On a l'égalité dans (2) si et seulement si les osculateurs $X_{a_i}(\rho_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$, sont de dimensions maximales et en somme directe projective. En permutant les points $a_1, \ldots, a_n$, on obtient le résultat suivant dont on démontrera une sorte de réciproque au début du Chapitre 2.

LEMME 1.3. — *Soit $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(q)$ et $a_1, \ldots, a_n$ des points deux-à-deux distincts de X_{reg} tels que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ voisin de $(a_1, \ldots, a_n)$, il existe une courbe $C \in \mathrm{CRN}_q(X)$ passant par les points $x_1, \ldots, x_n$. Si $q = \rho(n-1) + m - 1$ est la division euclidienne de q par $n-1$, X est ρ-régulière en chaque point a_i et pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, on a :*

$$(3) \qquad \langle X \rangle = (\oplus_{i=1}^{m} X_{a_{\sigma(i)}}(\rho)) \oplus (\oplus_{i=m+1}^{n-1} X_{a_{\sigma(i)}}(\rho - 1)).$$

1.3. Exemples : les classes $\mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$ et $\mathcal{X}_{r+1,2}(q)$. — Considérons d'abord le cas particulier d'une variété $X \in \mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$. La formule (1) donne $\pi_{r,n}(n-1) = r + n - 1$.

La variété X, de dimension $r+1$, engendre un espace $\mathbb{P}^{r+n-1}$ et vérifie que, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe $C \in \mathrm{CRN}_{n-1}(X)$ qui passe par $x_1, \ldots, x_n$. Il est bien connu que, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ générique, les n points $x_1, \ldots, x_n$ engendrent un $\mathbb{P}^{n-1}$ et que $X \cap \mathbb{P}^{n-1}$ est une courbe irréductible (et réduite). C'est donc la courbe C. On en déduit que X est de degré $n - 1$, le degré minimal d'une variété projective de dimension $r + 1$ qui engendre un espace de dimension $r + n - 1$. Une telle variété est appelée une variété de degré minimal ou, plus simplement, une *variété minimale*. La réciproque est évidente :

LEMME 1.4. — *Les variétés appartenant à la classe $\mathcal{X}_{r+1,n}(n-1)$ sont les variétés minimales de dimension $r+1$ et de degré $n-1$.*

Ces variétés sont connues. Nous en rappellerons la classification dans le Chapitre 5.

Une variété de Veronese de dimension $s \geq 1$ et d'ordre q est une variété projective qui, dans l'espace qu'elle engendre, est l'image de $\mathbb{P}^s$ par un plongement associé au système linéaire $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(q)|$. Par exemple, une variété de Veronese de dimension 1 et d'ordre q est une courbe rationnelle normale de degré q.

Bompiani a étudié dans [2] un problème de géométrie différentielle projective dont il a réduit la solution, et cette réduction occupe presque tout l'article, à la démonstration d'un cas particulier de son résultat principal qu'on peut énoncer ainsi :