Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOMBRES SELF NORMAUX

Anne Bertrand-Mathis

Tome 141
Fascicule 1

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 25-33

Bull. Soc. math. France
141 (1), 2013, p. 25–33

NOMBRES SELF NORMAUX

PAR ANNE BERTRAND-MATHIS

RÉSUMÉ. — Nous inspirant de la construction de Champernowne d'un nombre normal en base 10 nous construisons un ensemble de nombres "self-normaux" au sens de Schmeling ; cet ensemble est non dénombrable et dense dans $[1, \infty[$.

ABSTRACT (*Self-normal numbers*). — Using a method of Champernowne we propose a construction of self-normal numbers in the sense of Schmeling ; these numbers are dense in $[1, \infty[$ and form a non enumerable set.

1. Introduction

Étant donné un nombre $\beta > 1$ on peut écrire tout réel x de $[0, 1[$ en base β sous la forme $x = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{\beta^n}$ avec les conditions de Rényi : $x_n \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i>n} \frac{x_i}{\beta^i} < \frac{1}{\beta^n}$; cette écriture est unique ; la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est appelée β-développement de x et notée $d_\beta(x)$ [7].

Désignons par $[x]$ et $\{x\}$ les parties entières et fractionnaires d'un réel x ; on a $x_i \in \{0, 1, \ldots, [\beta]\}$. Soit T_β la transformation de $[0, 1[$ dans lui-même : $x \mapsto \{\beta x\}$; x_i est alors égal à $[\beta(T^i_\beta(x))]$ et $T^i_\beta = \sum_{k\geq 1} \frac{x_{i+k}}{\beta^k}$ a pour β-développement $(x_{i+1}x_{i+2}x_{i+3}\cdots)$; la transformation T_β conserve une unique mesure

Texte reçu le 16 décembre 2009, révisé le 26 novembre 2010, accepté le 20 mai 2011.

ANNE BERTRAND-MATHIS

Classification mathématique par sujets (2010). — 11K, 37D..

Mots clefs. — Nombres normaux, points génériques, numération, systèmes dynamiques symboliques, codes préfixes.

μ_β absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue que nous appellerons mesure de Parry [8] ; cette mesure est l'unique mesure T_β-invariante d'entropie maximale $\log \beta$ sur $[0,1]$.

DÉFINITION 1.1. — On appelle (improprement) β-développement de 1 l'unique suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 1}$ notée $d_\beta(1)$ qui vérifie $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$ ainsi que les conditions de Rényi sauf au rang $n = 1$: a_1 est égal à $[\beta]$ et $(a_2 a_3 \dots)$ est le β-développement de $\{\beta\}$; la suite $d_\beta(1)$ est aussi appelée β-développement de β car $\beta = a_1 + \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}}{\beta^n}$.

C'est au β-développements des nombres β que nous nous intéresserons.

Un sous ensemble de $[1,\infty[$ est dit résiduel s'il contient une intersection dénombrable d' ouverts denses ; le complémentaire d'un ensemble résiduel est dit maigre.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'un espace métrique E est répartie selon une mesure borélienne μ sur E si pour toute fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ on a $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N}(f(u_n)) = \mu(f)$.

DÉFINITION 1.2. — Nous dirons qu'un nombre β est autonormal si la suite $\left\{T_\beta^n(1)\right\}$est répartie selon la mesure μ_β.

Schmeling [8] a montré que pour presque tout β au sens de Lebesgue la suite $(T_\beta^n(1))_{n\geq 1}$ est dense dans $[0,1[$ (l'ensemble des nombres possédant cette propriété est résiduel) et que l'ensemble des nombres autonormaux (ou encore self-normaux), est un ensemble maigre dont la mesure de Lebesgue est aussi égale à 1.

Dans [1] les auteurs remarquent que si presque tout nombre supérieur à 1 est autonormal on n'en connait aucun exemple.

Nous allons contruire pas à pas des nombres self-normaux selon une méthode Champernownesque (le nombre de Champernowne en base 10 est $x = 0,123\dots 9101112\dots 9899100101\dots$; il est normal en base 10 [5] (et il est transcendant)) et montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Le procédé décrit dans la partie* 4 *permet de construire un ensemble non dénombrable et dense de nombres self-normaux.*

Pour ce faire il nous faut plus d'explications sur les β-développements.

2. Le β-shift

Parry [6] donne la description que voici des β-développements, du β-shift et de la mesure μ_β (voir aussi [2]).

Étant donné deux suites infinies $x = (x_n)_{n\geq 1}$et y=$(y_n)_{n\geq 1}$ on dira que $x < y$ s'il existe un entier k tel que $x_1 \dots x_k < y_1 \dots y_k$ pour l'ordre lexicographique habituel ; ainsi $(32313131\dots) < (323131320000\dots)$.

Proposition 2.1 ([6]). — *Une suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ est le β-développement d'un nombre β si et seulement si la suite a vérifie, pour tout $n > 1$ $(a_n a_{n+1} \dots) < (a_1 a_2 \dots)$ On a alors $a_1 = [\beta]$ et si deux suites a et b avec $a < b$ sont les β-développements de deux nombres β, disons β_a et β_b, alors $\beta_a < \beta_b$.*

En particulier une suite a qui se termine par des zéros : a = $(a_1 \dots a_n 0000\dots)$ où a_n est non nul est le β-développement d'un nombre β si et seulement si pour l'ordre lexicographique usuel $a_2 a_3 \dots a_n \leq a_1 a_2 \dots a_{n-1}$; $a_3 a_4 \dots a_n \leq a_1 a_2 \dots a_{n-2}$;... ; $a_{n-1} a_n \leq a_1 a_2$; $a_n \leq a_1$; on dit alors que le β-développement de β est $(a_1 \dots a_k)$; l'ensemble des nombres β ainsi obtenus, dits Nombres de Parry simples, est dense dans $[1, \infty[$.

Corollaire 2.2. — *Une suite $(a_1 a_2 \dots)$ qui ne se termine pas par des zéros est le β-développement d'un nombre β si et seulement si, pour tout k, la suite $(a_1 \dots a_k)$ est le β_k-développement d'un nombre β_k ; β est alors la limite croissante des β_k (c'est encore vrai s'il existe une sous suite infinie croissante m_k de $\mathbb{N}$ telle que la suite $(a_1 \dots a_{m_k})$ soit le β_k-développement d'un nombre β_k).*

Exemple : la suite 21111... est le β-développement d'un nombre β ; les suites qui sont des développements sont celles qui contiennent des 0,1 et 2 et où un 2 est suivi d'un nombre fini de 1 suivi d'un zéro. Pour tout k la suite $a_k = (2(1)^k(0)^\omega)$ définit un β-nombre simple β_k et β est la limite croissante des β_k.

Définition 2.3. — Étant donné un nombre β de β-développement $(a_n)_{n\geq 1}$, les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ qui sont le β-développement d'un nombre $x \in [0, 1[$ sont les suites qui vérifient pour tout $k \geq 1$ $(x_k x_{k+1} \dots) < (a_1 a_2 \dots)$; soit Y leur ensemble.

Étant donné un nombre β de β-développement $(a_n)_{n\geq 1}$ nous dirons qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$est admissible en base β si pour tout $k \geq 1$ $a_k a_{k+1} a_{k+2} \cdots \leq a_1 a_2 a_3 \dots$; soit X_β leur ensemble.

Y est inclus dans $A = \{0, 1, \dots, [\beta]\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1, \dots, a_1\}^{\mathbb{N}}$; la fermeture de Y pour la topologie produit de la topologie discrète sur A est égale à X_β ; on l'appelle le β-shift. X_β est muni de la transformation $T : (x_1 x_2 \dots) \longmapsto (x_2 x_3 \dots)$; lorsque $(x_1 x_2 \dots)$ est le β-développement de $x \in [0, 1[$, $(x_2 x_3 \dots)$

est celui de $\{\beta x\}$. Notons que le β-développement de β n'est pas dans Y (il est égal à lui meme et non strictement inférieur).

Toute suite finie (appelée mot) $t_1 \dots t_n$ apparaissant dans au moins un β-développement est dite *mot admissible en base* β et on note L_β l'ensemble de ces mots ; pour $(21111(0)^\omega)$ par exemple le mot 111 est admissible, 210211 aussi mais 0022 ne l'est pas.Une suite infinie est admissible si et seulement tous les mots finis qu'elle contient sont admissibles.

Soit f l'application de X_β dans $[0,1]$ qui à une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ associe $\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{\beta^n}$; $f \circ T = T_\beta \circ f$ et l'image inverse de la mesure μ_β sur $[0,1]$ est une mesure borélienne T-invariante sur X_β que nous noterons $\bar{\mu}_\beta$.

Proposition 2.4. — *Étant donné un nombre β de β-développement $(a_n)_{n\geq 1}$, dire que la suite $\left(T_\beta^n(1)\right)$ est répartie selon la mesure μ_β (et donc que β est autonormal) équivaut à dire que chaque mot $t_1 \dots t_k$ admissible en base β apparait dans la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec la fréquence $\bar{\mu}_\beta(E(t_1 \dots t_k))$ où $E(t_1 \dots t_k) = \{(x_n)_{n\geq 1} \in X_\beta \,;\, x_1 \dots x_k = t_1 \dots t_k\}$ ([4, 2]).*

3. Codes préfixes

Étant donné un alphabet A nous appellerons mot sur A une suite finie $x_1 \dots x_k$ sur A ; la *longueur d'un mot* est le nombre de lettres qu'il contient (le mot vide est celui qui ne contient aucune lettre) et le concaténé de deux mots $x_1 \dots x_h$ et $y_1 \dots y_k$ est le mot $x_1 \dots x_h y_1 \dots y_k$; un mot u est dit *préfixe* du mot w s'il existe un mot v tel que $uv = w$ et il est dit *suffixe* de w s'il existe v tel que $vu = w$.

Un ensemble C de mots non vides sur A est dit *code préfixe* si aucun mot de C n'est préfixe d'un autre mot de C ; si $u_1 \dots u_l = v_1 \dots v_m$ ou les u_i et v_j sont tous dans le code alors $l = m$ et $u_1 = v_1, \dots, u_l = v_l$. L'ensemble des suites $(t_1 t_2 \dots)$ qui s'écrivent comme produit d'un suffixe éventuellement vide v d'un mot du code suivi d'une suite infinie de mots du code est un sous ensemble T-invariant de $A^{\mathbb{N}}$ dont la fermeture est un système dynamique. On appelé *message* du code C un produit fini de mots de C ; la longueur d'un message est le nombre de lettres qu'il contient, c'est la somme des longueur des mots du code qui le composent(et non pas le nombre de ces mots). Soit a_n le nombre de mots de longueur n du code ; s'il est borné il existe un nombre réel, disons β, tel que $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n} = 1$ et le système dynamique associé au code est muni d'une mesure ν ergodique d'entropie $\log \beta$ [4] qui possède la propriété suivante :

Proposition 3.1 ([3]). — *Soit un code C, a_n le nombre de mots de longueur n du code ; supposons a_n bornée ; soit β le nombre réel tel que $1 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$; si nous alignons les messages de longueur 1 du code,, puis ceux de longueur*