Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SIMILITUDE DES MULTIPLES DES FORMES D'ALBERT EN CARACTÉRISTIQUE 2

Detlev W. Hoffmann & Ahmed Laghribi

Tome 141
Fascicule 2

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 343-354

Bull. Soc. math. France
141 (2), 2013, p. 343–354

SIMILITUDE DES MULTIPLES DES FORMES D'ALBERT EN CARACTÉRISTIQUE 2

PAR DETLEV W. HOFFMANN & AHMED LAGHRIBI

RÉSUMÉ. — Étant donnés F un corps commutatif de caractéristique 2, γ_1, γ_2 des formes bilinéaires d'Albert et π_1, π_2 des k-formes quadratiques de Pfister, ou γ_1, γ_2 des k-formes bilinéaires de Pfister et π_1, π_2 des formes quadratiques d'Albert (*resp.* γ_1, γ_2 des formes bilinéaires d'Albert et π_1, π_2 des k-formes bilinéaires de Pfister avec la condition que $\gamma_i \otimes \pi_i$, $i = 1, 2$, soient anisotropes), alors on montre que $\gamma_1 \otimes \pi_1 \perp \gamma_2 \otimes \pi_2 \in I_q^{k+3}F$ (*resp.* $I^{k+3}F$) si et seulement si $\gamma_1 \otimes \pi_1$ est semblable à $\gamma_2 \otimes \pi_2$. Un exemple montre que la condition de l'anisotropie est nécessaire dans le cas bilinéaire.

ABSTRACT (*Similarity of multiples of Albert forms in characteristic 2*)

Let F be a field of characteristic 2. Let γ_1, γ_2 be Albert bilinear forms and π_1, π_2 quadratic k-Pfister forms, or γ_1, γ_2 bilinear k-Pfister forms and π_1, π_2 Albert quadratic forms (resp. γ_1, γ_2 Albert bilinear forms and π_1, π_2 bilinear k-Pfister forms with the condition that $\gamma_i \otimes \pi_i$, $i = 1, 2$, are anisotropic). Then we show that $\gamma_1 \otimes \pi_1 \perp \gamma_2 \otimes \pi_2 \in I_q^{k+3}F$ (resp. $I^{k+3}F$) if and only if $\gamma_1 \otimes \pi_1$ is similar to $\gamma_2 \otimes \pi_2$. We give an example which shows that the anisotropy condition is necessary in the bilinear case.

Texte reçu le 7 novembre 2011 et accepté le 30 mars 2012.

DETLEV W. HOFFMANN, Lehrstuhl VI, Fakultät für Mathematik, Technische Universität Dortmund, 44221 Dortmund, Germany •
E-mail : `detlev.hoffmann@math.tu-dortmund.de`

AHMED LAGHRIBI, Université d'Artois, Faculté des Sciences Jean Perrin, Laboratoire de mathématiques de Lens EA 2462, rue Jean Souvraz - SP18, 62307 Lens, France •
E-mail : `laghribi@euler.univ-artois.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 11E04, 11E81.

Mots clefs. — Formes quadratiques (bilinéaires), formes d'Albert, formes de Pfister, similarité.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2013/343/$ 5.00

1. Introduction

Soit F un corps commutatif. On note $W(F)$ l'anneau de Witt des formes bilinéaires (*resp.* l'anneau de Witt des formes quadratiques) lorsque F est de caractéristique 2 (*resp.* lorsque F est de caractéristique différente de 2). Pour tout entier $n \geq 1$, soit I^nF la puissance n-ième de l'idéal fondamental IF de $W(F)$ (on prend $I^0F = W(F)$). En caractéristique 2, on note $W_q(F)$ le groupe de Witt des formes quadratiques non singulières, et I_q^nF le groupe $I^{n-1}F \otimes W_q(F)$ pour $n \geq 1$, où $\otimes$ est l'action de module de $W(F)$ sur $W_q(F)$ [1]. On désigne par $\overline{I^n}F$ et $\overline{I_q^n}F$ les quotients $I^nF/I^{n+1}F$ et $I_q^nF/I_q^{n+1}F$, respectivement.

Rappelons qu'une forme quadratique de dimension 6 est dite une forme d'Albert si elle est de discriminant trivial ou d'invariant d'Arf trivial suivant que F est de caractéristique $\neq 2$ ou non. Un résultat bien connu donnant le lien entre ce type de formes quadratiques et les algèbres simples centrales est dû à Jacobson [8], et affirme que deux formes quadratiques d'Albert sont semblables si et seulement si elles ont le même invariant de Clifford. En utilisant le résultat de Merkurjev [17] et celui de Sah [18], on voit que ce résultat de Jacobson équivaut à dire que deux formes quadratiques d'Albert γ_1 et γ_2 sont semblables si et seulement si $\gamma_1 \perp \gamma_2 \in I^3F$ (ou $\gamma_1 \perp \gamma_2 \in I_q^3F$ si F est de caractéristique 2). C'est ce que Mammone et Shapiro ont utilisé dans [16] pour donner une autre preuve de ce résultat de Jacobson. Plus tard, en caractéristique $\neq 2$, le premier auteur a répondu par l'affirmative a une conjecture d'Izhboldin généralisant le résultat de Jacobson, et affirmant que si π_1, π_2 sont des k-formes quadratiques de Pfister et γ_1, γ_2 sont des formes quadratiques d'Albert, alors les formes $\gamma_1 \otimes \pi_1$ et $\gamma_2 \otimes \pi_2$ sont semblables si et seulement si $\gamma_1 \otimes \pi_1 \perp \gamma_2 \otimes \pi_2 \in I^{k+3}F$ [6]. Mentionnons que ce résultat pour $k = 1$ a été utilisé par Garibaldi [5, Theorem 15.4] dans la détermination de la forme de Killing de certains groupes de type E_8.

Dans ce papier, on va établir l'analogue de ce résultat en caractéristique 2 en prenant γ_1 et γ_2 des formes bilinéaires d'Albert, et π_1 et π_2 des formes quadratiques (ou bilinéaires) de Pfister, ou bien γ_1 et γ_2 des formes bilinéaires de Pfister et π_1 et π_2 des formes quadratiques d'Albert. Rappelons qu'en caractéristique 2, une forme bilinéaire d'Albert est une forme de dimension 6 et de déterminant trivial. Notre résultat principal est le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit F un corps de caractéristique 2. Considérons les trois cas suivants :*

(a) *γ_1, γ_2 sont des formes bilinéaires d'Albert, et π_1, π_2 des k-formes quadratiques de Pfister, $k \geq 1$;*
(b) *γ_1, γ_2 sont des k-formes bilinéaires de Pfister, et π_1, π_2 des formes quadratiques d'Albert.*

(c) γ_1, γ_2 *sont des formes bilinéaires d'Albert, et* π_1, π_2 *des* k*-formes bilinéaires de Pfister et les formes* $\gamma_i \otimes \pi_i$, $i = 1, 2$, *sont anisotropes.*

Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\gamma_1 \otimes \pi_1$ *est semblable à* $\gamma_2 \otimes \pi_2$ *;*
(2) $\gamma_1 \otimes \pi_1 \perp \gamma_2 \otimes \pi_2 \in I_q^{k+3}F$ *dans les cas (a) et (b), et* $\gamma_1 \otimes \pi_1 \perp \gamma_2 \otimes \pi_2 \in I^{k+3}F$ *dans le cas (c), respectivement.*

Ce théorème dans le cas (a) est dû au second auteur lorsque π_1, π_2 sont des 0-formes bilinéaires de Pfister, i.e., des formes de dimension 1 données par : $(x, y) \mapsto xy$ [12].

La preuve du théorème 1 sera faite en trois étapes. Tout d'abord, on traitera le cas (a), c'est-à-dire, lorsque π_1 et π_2 sont des k-formes quadratiques de Pfister. Notre preuve dans ce cas est inspirée de l'argument utilisé dans [6]. Il s'en suit le cas (b) en invoquant des résultats connus sur la liaison des formes de Pfister en caractéristique 2. Après cela, on donnera la preuve dans le cas (c) en se ramenant au cas (a) par le moyen d'un argument générique. L'utilisation d'un tel argument est motivée par le fait que la preuve dans le cas quadratique ne marche pas dans le cas bilinéaire en raison du théorème de sous-forme qui se complique dans le cas des formes bilinéaires.

Pour la suite de ce papier, on suppose que F est de caractéristique 2. En faisant l'analogie avec le théorème de Jacobson qui fait intervenir l'invariant de Clifford, on peut formuler le théorème 1 en termes d'invariants utilisant les formes différentielles. Rappelons que pour tout entier $n \geq 1$, on prend $\Omega_F^n = \wedge^n \Omega_F^1$ l'espace des n-formes différentielles ($\Omega_F^0 = F$), où Ω_F^1 est le F-espace vectoriel engendré par les symboles dx, $x \in F$, avec les relations : $d(x+y) = dx + dy$ et $d(xy) = xdy + ydx$ pour tous $x, y \in F$. En particulier, $d(F^2) = 0$, ce qui permet d'avoir une application F^2-linéaire $d : F \longrightarrow \Omega_F^1$, donnée par : $x \mapsto dx$. Cette application s'étend de manière naturelle en une application $d : \Omega_F^n \longrightarrow \Omega_F^{n+1}$, donnée par : $d(xdx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = dx \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Clairement, l'espace Ω_F^n est engendré par les n-formes différentielles logarithmiques $\frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$ pour $x_1, \cdots, x_n \in F^* := F \setminus \{0\}$. L'opérateur d'Artin-Schreier s'étend en un homomorphisme $\wp : \Omega_F^n \longrightarrow \Omega_F^n / d\Omega_F^{n-1}$ donné par : $\wp(x\frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}) = \overline{(x^2 - x)\frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}}$. Soient $\nu_F(n) = \mathrm{Ker}(\wp)$ et $H_2^{n+1}(F) = \mathrm{Coker}(\wp)$. Un résultat bien connu de Kato [9] affirme l'existence de deux isomorphismes $e^n : \overline{I^n}F \longrightarrow \nu_F(n)$ et $f^n : \overline{I_q^n}F \longrightarrow H_2^n(F)$ donnés sur les générateurs comme suit :

$$e^n(\overline{\langle\langle a_1, \cdots, a_n \rangle\rangle_b}) = \frac{da_1}{a_1} \wedge \cdots \wedge \frac{da_n}{a_n},$$

$$f^n(\overline{\langle\langle a_1,\cdots,a_{n-1},b]]}) = \overline{b\frac{da_1}{a_1}\wedge\cdots\wedge\frac{da_{n-1}}{a_{n-1}}},$$

où $\langle\langle a_1,\cdots,a_n\rangle\rangle_b$ est la n-forme bilinéaire de Pfister $\langle 1,a_1\rangle_b\otimes\cdots\otimes\langle 1,a_n\rangle_b$, sachant que $\langle c_1,\cdots,c_n\rangle_b$ désigne la forme bilinéaire diagonale $\sum_{i=1}^n c_ix_iy_i$ pour tous $c_1,\cdots,c_n\in F^*$, et $\langle\langle a_1,\cdots,a_{n-1},b]]$ est la n-forme quadratique de Pfister $\langle\langle a_1,\cdots,a_{n-1}\rangle\rangle_b\otimes[1,b]$, où $[1,b]$ désigne la forme quadratique binaire $x^2+xy+by^2$.

Ainsi, aux formes $B\in I^nF$ et $\varphi\in I_q^mF$, on associe les formes différentielles

$$\mathrm{Inv}_b^n(B) := e^n(B+I^{n+1}F),$$
$$\mathrm{Inv}_q^{n+m}(B\otimes\varphi) := e^n(B+I^{n+1}F)\wedge f^m(\varphi+I_q^{m+1}F),$$

qui sont des invariants de $B+I^{n+1}F\in\overline{I^n}F$ et $B\otimes\varphi+I_q^{n+m+1}F\in\overline{I_q^{n+m}}F$ par les isomorphismes ci-dessus. Par conséquent, le théorème 1 se reformule comme suit :

THÉORÈME 2. — *En reprenant les notations du théorème 1, alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\gamma_1\otimes\pi_1$ *est semblable à* $\gamma_2\otimes\pi_2$ *;*
(2) $\mathrm{Inv}_q^{k+2}(\gamma_1\otimes\pi_1)=\mathrm{Inv}_q^{k+2}(\gamma_2\otimes\pi_2)$ *dans les cas (a) et (b), et* $\mathrm{Inv}_b^{k+2}(\gamma_1\otimes\pi_1)=\mathrm{Inv}_b^{k+2}(\gamma_2\otimes\pi_2)$ *dans le cas (c), respectivement.*

2. Rappels et résultats préliminaires

On renvoie à [1] et [7] pour plus de détails sur certaines notions qu'on va utiliser sur les formes bilinéaires et quadratiques. Rappelons tout de même que deux formes bilinéaires (ou quadratiques) φ et ψ sont dites semblables si $\varphi\simeq\alpha\psi$ pour $\alpha\in F^*$ convenable. Pour φ une forme quadratique, on note $F(\varphi)$ le corps de fonctions de la quadrique projective d'équation $\varphi=0$. La dimension d'une forme quadratique (ou bilinéaire) φ est notée $\dim\varphi$. Si B est une forme bilinéaire d'espace sous-jacent V, on désigne par $\widetilde{B}$ la forme quadratique définie sur V par : $\widetilde{B}(v)=B(v,v)$ pour $v\in V$. Pour $a_1,\cdots,a_n\in F$, on note $\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ la forme quadratique diagonale $\sum_{i=1}^n a_ix_i^2$. Une forme quadratique (ou bilinéaire) φ d'espace sous-jacent V est dite isotrope s'il existe $v\in V$ non nul tel que $\varphi(v)=0$ (ou $\widetilde{\varphi}(v)=0$). L'indice de Witt et la partie anisotrope d'une forme quadratique non singulière (ou bilinéaire) φ sont notés $i_W(\varphi)$ et φ_{an}, respectivement. Un plan métabolique est une forme bilinéaire isotrope de dimension 2 ; on montre qu'une telle forme est donnée par la matrice $\mathbb{M}_a=\begin{pmatrix}a&1\\1&0\end{pmatrix}$ pour $a\in F$ convenable, et on a $\mathbb{M}_a\simeq\mathbb{M}_b$ ssi $aF^{*2}=bF^{*2}$, ce qui montre que pour les formes bilinéaires il y a plusieurs plans métaboliques à